Sur le mouvement du pendule simple et sur celui d'un corps solide autour d'un point fixe, en ayant égard à la rotation de la terre.

Mémoire, lu à l'académie des sciences de Copenhague
le 15 Avril 1853.

Par

Chr. Jürgensen.

Copenhague.

Imprimerie de Bianco Luno.

1853.

Le mémoire qu'on va lire était en grande partie achevé lorsque j'ai eu connaissance d'une question proposée au commencement de l'année 1852 par la société physique de Danzig, qui avait pour but de provoquer une recherche théorique sur le mouvement du pendule en ayant égard à la rotation de la terre, et notamment dans l'esprit de Lagrange, la théorie donnée dans la mécanique analytique sur le mouvement du pendule étant devenue incomplète par la découverte de M. Foucault. Quoique les recherches que j'avais entreprises eussent principalement pour objet le mouvement d'un corps solide considéré dans le § 4, j'envoyai cependant au concours ce mémoire après y avoir ajouté ce qu'on trouve dans le § 1 sur la théorie de Lagrange, relativement au pendule simple et quelques développements insérés dans les deux paragraphes suivants.

Un mémoire de M. Hansen de Gotha ayant remporté le prix dans ce concours, ce n'est pas sans hésitation que je publie cet opuscule, qui sera sans doute en plusieurs points rendu superflu par l'ouvrage de ce savant célèbre, notamment ce qu'on trouve dans les trois premiers paragraphes. Néanmoins, ces développements étant nécessaires pour l'intelligence de ce qui va suivre, j'ai conservé la forme une fois donnée à cet écrit; j'ai même conservé la langue française dont je m'étais servi, les pièces destinées au concours mentionné ne pouvant être écrites en Danois.

L'addition a été écrite depuis à l'occasion des expériences récentes sur le mouvement de rotation d'un solide de révolution en ayant égard à la rotation de la terre, et de quelques essais d'expérience que j'ai faits moi-même. Les résultats, auxquels on y parvient, se rattachent à la théorie connue du mouvement d'un corps grave autour d'un point fixe, théorie ébauchée dans la mécanique analytique et exposée plus en détail dans le traité de mécanique de Poisson.

Du reste on ne trouvera pas dans ce mémoire le calcul des petites inégalités dans les mouvements que j'ai traités; je n'ai fait qu'indiquer ces inégalités, dont le calcul exigerait une analyse très-délicate, mais qu'il serait sans doute impossible de vérifier par l'expérience. Je me suis borné aux phénomènes observables, dont je me suis attaché à présenter la théorie avec autant de clarté et de simplicité qu'il m'a été possible.

§ 1.

Théorie de Lagrange sur le mouvement du pendule simple.

Dans la mécanique analytique 2me partie sect. VIII chap. II § 1 (2de éd. Vol. 2, pag. 194 & suiv.) *Lagrange* a donné la théorie de l'oscillation du pendule simple avec les formules propres à calculer, par approximation, le mouvement vertical et horizontal. La rédaction de ce paragraphe, imprimé sans doute après la mort de l'auteur, étant très peu satisfaisante, spécialement en ce qui regarde le mouvement horizontal, où la première valeur approchée de l'angle à la verticale parcouru dans le temps d'une oscillation n'est pas exacte, je vais le reproduire ici en peu de mots, en étendant en même temps au second ordre l'approximation pour le mouvement horizontal, qu'il importe de déterminer pour des oscillations un peu considérables, à cause de son rapport à l'objet qui nous occupe.

Les deux équations fondamentales que *Lagrange* a formées de la manière qui lui est propre, découlent immédiatement des trois équations ordinaires pour le mouvement du pendule simple, savoir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{r} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{r} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g - N\frac{z}{r},$$

x et y étant horizontales, z verticale et dirigée dans le sens de la pesanteur, et $-N$ désignant la résistance de la surface sphérique contraire à la tension du fil. On tire de là

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = 2gz + Er^2$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = C\,r^2$$

E et C étant deux constantes arbitraires. Faisant

$$x = r\sin\psi\cos\varphi, \quad y = r\sin\psi\sin\varphi, \quad z = r\cos\psi,$$

on transforme ces équations dans celles-ci,

$$r^2 \frac{d\,\psi^2}{d\,t^2} + r^2 \sin^2\psi \frac{d\,\varphi^2}{d\,t^2} - 2\,g\,r\,\cos\psi = E\,r^2$$

$$r^2 \sin^2\psi \frac{d\,\varphi}{d\,t} = C\,r^2,$$

ou bien

$$\frac{d\,\psi^2}{d\,t^2} + \frac{C^2}{\sin^2\psi} - \frac{2\,g}{r}\cos\psi = E$$

$$\sin^2\psi \frac{d\,\varphi}{d\,t} = C,$$

d'où l'on tire

$$d\,t = \frac{\sin\psi\, d\,\psi}{\sqrt{(E + \frac{2\,g}{r}\cos\psi)\sin^2\psi - C^2}}$$

$$d\,\varphi = \frac{C\,d\,\psi}{\sin\psi\sqrt{(E + \frac{2\,g}{r}\cos\psi)\sin^2\psi - C^2}}$$

La quantité sous le signe, égalée a zéro, donne une équation du 3me degré par rapport à $\cos\psi$, laquelle aura ses trois racines réelles, mais on verra qu'en dénotant deux de celles-ci par $\cos\alpha$ et $\cos\beta$, la troisième sera plus grande que l'unité et répondra par conséquent à un angle imaginaire. En effet, supposant $\alpha > \beta$ et

$$(E + 2\frac{g}{r}\cos\alpha)\sin^2\alpha - C^2 = 0$$

$$(E + 2\frac{g}{r}\cos\beta)\sin^2\beta - C^2 = 0,$$

on peut écrire la différence de ces équations comme il suit

$$E(\cos^2\beta - \cos^2\alpha) - 2\frac{g}{r}(\cos\beta - \cos\alpha) + 2\frac{g}{r}(\cos^3\beta - \cos^3\alpha) = 0$$

ou bien

$$E(\cos\beta + \cos\alpha) - 2\frac{g}{r}(1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos\alpha\cos\beta) = 0.$$

Partant $\dfrac{E\,r}{2\,g} = \dfrac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} - (\cos\alpha + \cos\beta)$,

et puis $C^2 = \dfrac{2\,g}{r}\dfrac{\sin^2\alpha\sin^2\beta\,(\cos\alpha - \cos\beta)}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha} = \dfrac{2\,g}{r}\dfrac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

L'équation en $\cos\psi$ est

$$\cos^3\psi + \frac{E\,r}{2\,g}\cos^2\psi - \cos\psi + \frac{r}{2\,g}(C^2 - E) = 0$$

et le premier membre de celle-ci étant nommé V, la quantité sous le signe sera $= -2\frac{g}{r}V$. Or, la somme des racines étant $= -\frac{Er}{2g}$, la troisième racine est $= -\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, et

$$V = (\cos\psi - \cos\alpha)\,(\cos\psi - \cos\beta)\,\left(\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right).$$

Mais on a toujours, abstraction faite du signe, $\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} > 1$,

car $\frac{(1+\cos\alpha\cos\beta)^2}{(\cos\alpha+\cos\beta)^2} - 1 = \frac{(1-\cos^2\alpha)\,(1-\cos^2\beta)}{(\cos\alpha+\cos\beta)^2}$, quantité nécessairement positive.

Pour donner à la quantité sous le signe une forme encore plus commode, *Lagrange* suppose

$$\cos\psi = \cos\alpha\sin^2\omega + \cos\beta\cos^2\omega = \tfrac{1}{2}\{\cos\alpha+\cos\beta+(\cos\beta-\cos\alpha)\cos 2\omega\}$$

de sorte que $\psi = \alpha$ répond à $\omega = (n+\frac{1}{2})\pi$ et $\psi = \beta$ à $\omega = n\pi$. Les trois facteurs de V deviennent ainsi

$$\cos\psi - \cos\alpha = (\cos\beta - \cos\alpha)\cos^2\omega$$
$$\cos\psi - \cos\beta = -(\cos\beta - \cos\alpha)\sin^2\omega$$

$$\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} =$$
$$\frac{2+4\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{2(\cos\alpha+\cos\beta)} + \tfrac{1}{2}(\cos\beta-\cos\alpha)\cos 2\omega,$$

ou en faisant $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2+4\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta} = k^2$,

$$\cos\psi + \frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \frac{1}{2k^2} + \tfrac{1}{2}(\cos\beta-\cos\alpha)\cos 2\omega.$$

Or, en différenciant la valeur de $\cos\psi$, on a

$$\sin\psi\, d\psi = 2(\cos\beta - \cos\alpha)\sin\omega\cos\omega\, d\omega,$$

donc, en substituant ces valeurs,

$$dt = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\frac{2k\,d\omega}{\sqrt{1+k^2(\cos\beta-\cos\alpha)\cos 2\omega}} = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\frac{2k\,d\omega}{\Sigma}$$

$$\text{et } d\varphi = \frac{C\,dt}{\sin^2\psi} = \sqrt{\frac{2g}{r}}\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\left\{\frac{\frac{1}{2}\,dt}{1+\cos\psi} + \frac{\frac{1}{2}\,dt}{1-\cos\psi}\right\}$$

$$= \frac{k\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\left\{\frac{d\omega}{(1+\cos\psi)\,\Sigma} + \frac{d\omega}{(1-\cos\psi)\,\Sigma}\right\}$$

où l'on substituera pour $\cos\psi$ sa valeur en ω.

Lorsque le pendule ne fera que des excursions assez petites, on pourra réduire dt et $d\varphi$ en séries convergentes suivant les cosinus des arcs ω, 2ω, 4ω &c. En effet, en faisant

$$k^2 (\cos\beta - \cos\alpha) = \sin 2\gamma = \frac{2 \tang \gamma}{1 + \tang^2\gamma}$$

on a $\frac{1}{\Sigma} = (1 + k^2 (\cos\beta - \cos\alpha) \cos 2\omega)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{\cos\gamma} \left\{ 1 + 2 \tang \gamma \cos 2\omega + \tang^2\gamma \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Cette fonction peut se développer en une série de la forme

$$\frac{1}{\cos\gamma} \left\{ A + B \cos 2\omega + C \cos 4\omega + \ldots\ldots \right\}$$

où $A = 1 + \frac{1}{4} \tang^2\gamma + \ldots$, $B = -\tang\gamma - \ldots$, $C = \frac{3}{4} \tang^2\gamma + \ldots$

Substituant ces valeurs dans dt et intégrant depuis $\omega = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\omega = \frac{3}{2}\pi$ ou depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \pi$, on aura le temps d'une oscillation entière entre deux maxima (α) ou deux minima (β) de ψ, savoir *)

$$T = A \sqrt{\frac{g}{r}} \frac{2k\pi}{\cos\gamma}.$$

Lorsque α et β sont des quantités très-petites du premier ordre, $\tang\gamma$ sera très-petite du second ordre, et on aura, aux quantités du quatrième ordre près, $A = 1$, $\cos\gamma = 1$, donc

$$T = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \times k\pi = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \times \sqrt{\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2 + 4\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta}}$$

ou bien, en mettant $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, $1 - \frac{1}{2}\beta^2$ au lieu de $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ parcequ'on ne conserve que les termes du second ordre,

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \tfrac{1}{16} (\alpha^2 + \beta^2) \right\},$$

ce qui est analogue à la formule connue pour le cas de $\beta = 0$ (voir p. ex. mécanique de *Poisson* 2de éd. vol. I p. 345).

Pour trouver φ par approximation, on développera $\frac{1}{1 + \cos\psi}$ et $\frac{1}{1 - \cos\psi}$ de la même manière. On a

$$\frac{1}{1 \pm \cos\psi} = \frac{2}{2 \pm (\cos\alpha + \cos\beta) \pm (\cos\beta - \cos\alpha) \cos 2\omega}$$

Posant donc $\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{2 + \cos\alpha + \cos\beta} = \sin 2\mu = \frac{2 \tang \mu}{1 + \tang^2\mu}$

$$\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{2 - \cos\alpha - \cos\beta} = \sin 2\nu = \frac{2 \tang \nu}{1 + \tang^2\nu},$$

*) *Lagrange* dénote ce temps par $2T$, T étant le temps d'une demi-oscillation, c'est-à-dire depuis le point le plus haut jusqu'au point le plus bas, (pag. 200).

on aura

$$\frac{1}{1+\cos\psi}=\frac{2}{(2+\cos\alpha+\cos\beta)\cos^2\mu}\left\{1+2\tang\mu\cos 2\omega+\tang^2\mu\right\}^{-1}$$

$$\frac{1}{1-\cos\psi}=\frac{2}{(2-\cos\alpha-\cos\beta)\cos^2\nu}\left\{1-2\tang\nu\cos 2\omega+\tang^2\nu\right\}^{-1}$$

Mais on a en général, δ étant un angle quelconque,

$$(1\pm 2\tang\delta\cos 2\omega+\tang^2\delta)^{-1}$$
$$=\frac{1}{1-\tang^2\delta}\left\{1\mp 2\tang\delta\cos 2\omega+2\tang^2\delta\cos 4\omega\mp\ldots\right\}.$$

Si l'on multiplie la série dans la parenthèse par cette autre

$$A+B\cos 2\omega+C\cos 4\omega+\ldots.$$

le produit sera de la forme $A'+B'\cos 2\omega+C'\cos 4\omega+\ldots$ où

$$A'=A\mp B\tang\delta+C\tang^2\delta\mp\ldots.$$

Maintenant en substituant ces expressions dans $d\varphi$ et intégrant depuis $\omega=\frac{1}{2}\pi$ jusqu'a $\omega=\frac{3}{2}\pi$, ou généralement entre deux limites différentes entre elles de π, on trouve

$$\varphi=\frac{2k\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\left\{\frac{\pi}{(2+\cos\alpha+\cos\beta)\cos^2\mu\cos\gamma(1-\tang^2\mu)}\right.$$
$$(A-B\tang\mu+C\tang^2\mu-\ldots)$$
$$+\frac{\pi}{(2-\cos\alpha-\cos\beta)\cos^2\nu\cos\gamma(1-\tang^2\nu)}$$
$$\left.(A+B\tang\nu+C\tang^2\nu+\ldots)\right\}$$

Si l'on suppose que α et β soient très-petits, et qu'on néglige dans une première approximation les quantités très petites du second ordre, on aura $k=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\alpha$, $\sin\beta=\beta$, $\cos\alpha+\cos\beta=2$, $A=1$, $B=C=0$, $\mu=0$, $\gamma=0$, $\sin 2\nu=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ donc $\cos^2\nu\,(1-\tang^2\nu)=\cos 2\nu=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, $2-\cos\alpha-\cos\beta=2-(1-\frac{1}{2}\alpha^2)-(1-\frac{1}{2}\beta^2)=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$, donc

$$\varphi=\pi.$$

C'est l'angle à la verticale compris entre deux sommets consécutifs de la courbe. Mais cette valeur diffère notablement de celle de *Lagrange*, savoir

$$2\Phi=\frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\ \text{(pag. 204)}$$

excepté lorsque $\alpha=\beta$. Or on voit aisément la cause de cette différence si l'on observe que la valeur de A″ qui se trouve sur la page 202 de l'ouvrage de *Lagrange*, contient $1 + \tan^2 \nu$ au dénominateur au lieu de $1 - \tan^2 \nu$.

C'est là du reste le cas le plus simple, dans lequel la trajectoire devient elliptique et invariable de position, (Voir méc. de *Poisson* Tom. I p. 391—95). En effet, si l'on néglige les quantités très-petites du second ordre, l'équation différentielle de la trajectoire devient par ce qui précède (valeurs de $d\varphi$, C et V)

$$d\varphi = \frac{\alpha \beta \, d\psi}{\psi \sqrt{(\alpha^2 - \psi^2)(\psi^2 - \beta^2)}}.$$

Mais en désignant par ψ le rayon vecteur et par φ l'angle au pôle, on a pour équation polaire de l'ellipse, le pôle étant au centre et le grand axe faisant un angle δ avec l'origine des φ,

$$\alpha^2 \psi^2 \sin^2(\varphi - \delta) + \beta^2 \psi^2 \cos^2(\varphi - \delta) = \alpha^2 \beta^2,$$

laquelle donne par la différentiation

$$\alpha^2 \psi \, d\psi \sin^2(\varphi - \delta) + \beta^2 \psi \, d\psi \cos^2(\varphi - \delta) + (\alpha^2 \psi^2 - \beta^2 \psi^2) \sin(\varphi - \delta) \cos(\varphi - \delta) \, d\varphi = 0$$

ou bien $\dfrac{\alpha^2 \beta^2}{\psi} d\psi = (\beta^2 - \alpha^2) \psi^2 \sin(\varphi - \delta) \cos(\varphi - \delta) \, d\varphi$;

or on a par l'équation primitive

$$(\alpha^2 - \beta^2) \psi^2 \sin^2(\varphi - \delta) = (\alpha^2 - \psi^2) \beta^2$$
$$(\alpha^2 - \beta^2) \psi^2 \cos^2(\varphi - \delta) = (\psi^2 - \beta^2) \alpha^2,$$

partant $\dfrac{\alpha \beta}{\psi} d\psi = \sqrt{(\alpha^2 - \psi^2)(\psi^2 - \beta^2)} \, d\varphi$.

Pour voir ce qui arrive quand les amplitudes deviennent un peu plus considérables, il faut conserver dans l'expression de φ les secondes puissances de α et β. On aura ainsi

$$2k = 1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{16},$$

$$\sqrt{\frac{2}{\cos \alpha + \cos \beta}} = \sqrt{\frac{2}{2 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)}} = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{8}(\alpha^2 + \beta^2)$$

donc $\dfrac{2k\sqrt{2} \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\cos \alpha + \cos \beta}} = \sin \alpha \sin \beta \, [1 + \tfrac{3}{16}(\alpha^2 + \beta^2)]$.

Observant que γ et μ sont des quantités du second ordre, le premier terme de l'expression de φ pag. 5 dans la parenthèse se réduira à $A \dfrac{\pi}{4}$. On a ensuite $A = 1$, $B = -\tan \gamma$, puis

$$\sin 2\nu = \frac{(1-\cos\alpha)-(1-\cos\beta)}{(1-\cos\alpha)+(1-\cos\beta)} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\beta}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \sin^2\frac{1}{2}\beta}$$

donc $\cos 2\nu = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \sin^2\frac{1}{2}\beta}$,

d'ailleurs $\cos\gamma = 1$, donc

$$\begin{aligned}(2-\cos\alpha-\cos\beta)\cos\gamma\cos^2\nu(1-\mathrm{tang}^2\nu) &= \{(1-\cos\alpha)+(1-\cos\beta)\}\cos 2\nu\\ &= 2(\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + \sin^2\tfrac{1}{2}\beta)\cos 2\nu\\ &= 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta.\end{aligned}$$

Partant

$$\varphi = \sin\alpha\sin\beta\left\{1+\tfrac{3}{16}(\alpha^2+\beta^2)\right\}\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}(1-\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\nu)\right\}$$

Mais $\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{1}{2}k^2(\cos\beta-\cos\alpha)(1+\mathrm{tang}^2\gamma) = \frac{1}{2}k^2(\cos\beta-\cos\alpha)$ parcequ'on peut négliger $\mathrm{tang}^2\gamma$ dans cette approximation;

donc $\mathrm{tang}\,\gamma = \left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{64}\right)\left(\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2}\right) = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{16}$.

Ensuite $\mathrm{tang}\,\nu = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\nu}{1+\cos 2\nu}} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\beta} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$,

et enfin
$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta = (1-\tfrac{1}{8}\alpha^2)(1-\tfrac{1}{8}\beta^2) = 1-\tfrac{1}{8}(\alpha^2+\beta^2).$$

Substituant ces valeurs dans φ on aura, en rejetant toujours les termes des ordres supérieurs au second,

$$\varphi = \pi\left\{1+\tfrac{1}{4}\alpha\beta+\tfrac{3}{16}(\alpha^2+\beta^2)-\tfrac{1}{16}(\alpha-\beta)^2-\tfrac{1}{8}(\alpha^2+\beta^2)\right\},$$

ce qui se réduit à

$$\varphi = \pi\left\{1+\tfrac{3}{8}\alpha\beta\right\}.$$

On voit par là, que si l'on suppose encore à la trajectoire une forme elliptique, mais variable de position, le grand axe de cette ellipse aura un mouvement direct et proportionnel à l'aire de l'ellipse. Il serait facile de prévoir ce mouvement, sur lequel on peut voir le „treatise on Astronomy" de Mr. *Herschel* Nr. 569—70 pag. 361—64, où l'on a fait usage de cette expérience pour éclairer la théorie du mouvement des apsides.

Si l'on suppose $\alpha = \beta$, on aura $\psi = \text{const} = \alpha$,

donc $d\varphi = \sqrt{\dfrac{g}{r\cos\alpha}}\,dt$, $\varphi = \sqrt{\dfrac{g}{r\cos\alpha}}\,t$, de sorte que dans le temps

$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{8}\right)$ le mobile parcourra un angle à la verticale

$$\varphi = \pi\left(1 + \frac{\alpha^2}{8}\right)\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} = \pi\left(1 + \frac{\alpha^2}{8}\right)\sqrt{1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2} = \pi(1 + \tfrac{3}{8}\alpha^2)$$

ce qui est conforme à la valeur précédente.

Nous omettons ici la partie de la recherche de *Lagrange* qui traite de la résistance de l'air et de la tension et de l'élasticité du fil, puisque cette partie ne donne lieu à aucune remarque.

§ 2.

Formules générales de mouvement en ayant égard à la rotation de la terre.

Ces formules ont été données par *Poisson* dans son mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air en ayant égard à la rotation de la terre (Journal de l'école polytechnique cah. 26). L'analyse du mouvement du pendule dans la même hypothèse étant une application continuelle de ces formules, je vais les développer ici, et y ajouter deux mots pour en indiquer le véritable sens.

Pour établir les formules en question on n'a besoin que d'une simple transformation des coordonnées. Si l'on transforme d'abord les deux coordonnées x, y en deux autres ξ, v de manière que l'axe des ξ positives forme avec l'axe des x positives un angle ψ, compté positivement de $+x$ vers $+y$, et qu'on transforme ensuite v et z en deux autres η, ζ de manière que l'axe des η fasse avec l'axe des v un angle θ, compté positivement de $+v$ vers $+z$, on aura ces formules

$$\begin{aligned}
x &= \xi\cos\psi - \eta\sin\psi\cos\theta + \zeta\sin\psi\sin\theta \\
y &= \xi\sin\psi + \eta\cos\psi\cos\theta - \zeta\cos\psi\sin\theta \\
z &= \eta\sin\theta + \zeta\cos\theta,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit réciproquement

$$\begin{aligned}
\xi &= x\cos\psi + y\sin\psi \\
\eta &= -x\sin\psi\cos\theta + y\cos\psi\cos\theta + z\sin\theta \\
\zeta &= x\sin\psi\sin\theta - y\cos\psi\sin\theta + z\cos\theta.
\end{aligned}$$

L'origine étant au centre de la terre, les axes des x et des y seront compris dans le plan de l'équateur et dirigés en sorte que le sens du mouvement de $+x$ vers $+y$ soit celui de la rotation diurne de la terre, et l'axe des z sera dirigé vers le pôle de notre hemisphère. L'angle ψ sera $= nt$, n étant la vitesse angulaire du mouvement diurne de la terre dans une seconde de temps moyen solaire; $\theta = 90^0 - \gamma$, γ désignant la latitude géocentrique d'un lieu de la surface de la terre. Alors si l'on change ζ en $\zeta + r$, r étant le rayon terrestre, l'origine des coordonnées sera ce lieu, ξ dirigé vers l'est, η vers le nord et ζ suivant le prolongement du rayon terrestre.

Les équations ci-dessus deviennent ainsi

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos nt - \eta \sin nt \sin \gamma + (\zeta + r) \sin nt \cos \gamma \\ y &= \xi \sin nt + \eta \cos nt \sin \gamma - (\zeta + r) \cos nt \cos \gamma \\ z &= \qquad \eta \cos \gamma \qquad + (\zeta + r) \sin \gamma \end{aligned}$$

et réciproquement

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos nt + y \sin nt \\ \eta &= - x \sin nt \sin \gamma + y \cos nt \sin \gamma + z \cos \gamma \\ \zeta &= \quad x \sin nt \cos \gamma - y \cos nt \cos \gamma + z \sin \gamma - r \end{aligned}$$

Les équations différentielles du mouvement d'un point par rapport aux coordonnées fixes sont

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d V}{d x}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{d V}{d y}, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{d V}{d z},$$

V étant une fonction dont les trois différences partielles représentent les composantes des forces accélératrices.

Or, en différenciant les valeurs de x, y, z en ξ, η, ζ on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d t^2} &= \frac{d^2 \xi}{d t^2} \cos nt - \frac{d^2 \eta}{d t^2} \sin nt \sin \gamma + \frac{d^2 \zeta}{d t^2} \sin nt \cos \gamma \\ &\quad - 2n \frac{d\xi}{dt} \sin nt - 2n \frac{d\eta}{dt} \cos nt \sin \gamma + 2n \frac{d\zeta}{dt} \cos nt \cos \gamma - n^2 x \\ \frac{d^2 y}{d t^2} &= \frac{d^2 \xi}{d t^2} \sin nt + \frac{d^2 \eta}{d t^2} \cos nt \sin \gamma - \frac{d^2 \zeta}{d t^2} \cos nt \cos \gamma \\ &\quad + 2n \frac{d\xi}{dt} \cos nt - 2n \frac{d\eta}{dt} \sin nt \sin \gamma + 2n \frac{d\zeta}{dt} \sin nt \cos \gamma - n^2 y \\ \frac{d^2 z}{d t^2} &= \qquad \frac{d^2 \eta}{d t^2} \cos \gamma + \frac{d^2 \zeta}{d t^2} \sin \gamma ; \end{aligned}$$

pour abréger on a écrit dans les deux premières x et y au lieu de leurs valeurs en ξ, η, ζ.

De même en observant que $\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx}+\frac{dV}{d\eta}\,\frac{d\eta}{dx}+\frac{dV}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dx}$, &c. on a

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{d\xi}\cos nt-\frac{dV}{d\eta}\sin nt\sin\gamma+\frac{dV}{d\zeta}\sin nt\cos\gamma$$

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dV}{d\xi}\sin nt+\frac{dV}{d\eta}\cos nt\sin\gamma-\frac{dV}{d\zeta}\cos nt\cos\gamma$$

$$\frac{dV}{dz}=\frac{dV}{d\eta}\cos\gamma+\frac{dV}{d\zeta}\sin\gamma.$$

Par la substitution de ces valeurs les trois équations du mouvement seront transformées en d'autres par rapport aux coordonnées mobiles avec la terre. Mais ces équations deviennent plus simples, lorsqu'on les multiplie respectivement par les coefficiens de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ et qu'on les ajoute ensuite. On a ainsi les équations suivantes,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-2n\frac{d\eta}{dt}\sin\gamma+2n\frac{d\zeta}{dt}\cos\gamma-n^2\xi=\frac{dV}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+2n\frac{d\xi}{dt}\sin\gamma-n^2\sin\gamma\left\{\eta\sin\gamma-(\zeta+r)\cos\gamma\right\}=\frac{dV}{d\eta}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}-2n\frac{d\xi}{dt}\cos\gamma+n^2\cos\gamma\left\{\eta\sin\gamma-(\zeta+r)\cos\gamma\right\}=\frac{dV}{d\zeta}.$$

On peut remarquer, que les termes multipliés par n^2 représentent les composantes de la force centrifuge provenant de la rotation de la terre, parceque ξ et $(\zeta+r)\cos\gamma-\eta\sin\gamma$ sont les projections sur l'axe des ξ et sur le plan des $\eta\,\zeta$ d'une perpendiculaire menée du point ξ, η, ζ à l'axe terrestre.

Nous avons désigné par γ la latitude géocentrique; mais pour changer les équations qu'on vient de trouver en d'autres, qui contiennent la latitude astronomique, il n'y a qu'à transformer les deux coordonnées η, ζ en d'autres η', ζ' dont les axes font un petit angle φ avec ceux des η, ζ. Faisant donc

$$\eta=\eta'\cos\varphi+\zeta'\sin\varphi\qquad\zeta=\zeta'\cos\varphi-\eta'\sin\varphi,$$

on aura par un calcul tout semblable à celui qui précède,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-2n\frac{d\eta'}{dt}\sin(\gamma+\varphi)+2n\frac{d\zeta'}{dt}\cos(\gamma+\varphi)-n^2\xi=\frac{dV}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\eta'}{dt^2}+2n\frac{d\xi}{dt}\sin(\gamma+\varphi)-n^2\sin(\gamma+\varphi)\left\{\eta'\sin(\gamma+\varphi)-\zeta'\cos(\gamma+\varphi)-r\cos\gamma\right\}=\frac{dV}{d\eta'}$$

$$\frac{d^2\zeta'}{dt^2}-2n\frac{d\xi}{dt}\cos(\gamma+\varphi)+n^2\cos(\gamma+\varphi)\left\{\eta\sin(\gamma+\varphi)-\zeta\cos(\gamma+\varphi)-r\cos\gamma\right\}=\frac{dV}{d\zeta'},$$

d'ou l'on voit que si l'on comprend la force centrifuge *locale*, c'est-à-dire la partie constante de cette force ou sa valeur à l'origine des coordonnées, dans les forces accélératrices $\frac{dV}{d\eta'}$ et $\frac{dV}{d\zeta'}$, on pourra prendre indistinctement γ pour la latitude géocentrique ou astronomique. Ecrivant donc x, y, z au lieu de ξ, η', ζ' et désignant par X, Y, Z les composantes des forces accélératrices données, on aura pour équations du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2n\frac{dy}{dt}\sin\gamma - 2n\frac{dz}{dt}\cos\gamma + n^2x + X$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma + n^2\sin\gamma\,(y\sin\gamma - z\cos\gamma) + Y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2n\frac{dx}{dt}\cos\gamma - n^2\cos\gamma\,(y\sin\gamma - z\cos\gamma) + Z.$$

Si l'on veut avoir égard à la résistance de l'air, et qu'on suppose ce fluide en repos par rapport à la terre, il n'y a qu'à ajouter aux seconds membres les termes $-R\frac{dx}{ds}$, $-R\frac{dy}{ds}$, $-R\frac{dz}{ds}$, R étant la force accélératrice de cette résistance.

On peut donner à ces équations une forme qui met en évidence la nature des forces qu'on ajoute aux données pour avoir égard à l'influence de la rotation de la terre. En effet, si l'on transforme les coordonnées y et z en deux autres u et v, dont la première est parallèle à l'équateur et la seconde parallèle à l'axe terrestre et dirigée vers le pôle, on a

$$\begin{aligned} y &= u\sin\gamma + v\cos\gamma \\ z &= -u\cos\gamma + v\sin\gamma \end{aligned} \quad \text{donc} \quad \begin{aligned} u &= y\sin\gamma - z\cos\gamma \\ v &= y\cos\gamma + z\sin\gamma. \end{aligned}$$

Les trois équations deviennent ainsi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2n\frac{du}{dt} + n^2x + X$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -2n\frac{dx}{dt} + n^2u + U$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = V,$$

U et V étant les composantes des forces accélératrices parallèles aux axes des u et v. Et ces équations sont naturellement les mêmes que les équations ci-dessus en y faisant $\gamma = 90^0$.

Or, en désignant par dw la projection de l'élément ds de la trajectoire sur le plan des x, u, on peut écrire les deux premières équations comme il suit

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \quad 2 n \frac{d w}{d t} \frac{d u}{d w} + n^2 x + X$$

$$\frac{d^2 u}{d t^2} = -2 n \frac{d w}{d t} \frac{d x}{d w} + n^2 u + U$$

En vertu des premiers termes de ces équations le mobile se trouve animé d'une force accélératrice $2 n \frac{d w}{d t}$, parallèle au plan des x, u, perpendiculaire à l'élément $d w$ et tendante à le faire détourner de sa route en sens contraire à la rotation de la terre. Or, une force accélératrice a pour mesure le double de l'espace qu'elle fait parcourir pendant l'instant dt, divisé par le carré de dt. Donc cette force fait parcourir au mobile l'espace $n\, d w\, d t$, ainsi qne cela doit être.

Les termes $n^2 x$, $n^2 u$ sont les composantes de la force centrifuge, qui serait engendrée par la rotation du point x, u, v dans la circonférence d'un cercle parallèle au plan des x, u, dont le centre est sur l'axe des v et avec une vitesse angulaire n. C'est la partie restante après qu'on a compris la force centrifuge locale dans U. Généralement, on peut négliger cette force par rapport aux forces données, mais quand celles-ci sont très-petites, cela conduira à des résultats erronés. Par exemple, en supposant $X = 0$, $U = 0$, $V = 0$, les équations

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 2 n \frac{d u}{d t}, \quad \frac{d^2 u}{d t^2} = - 2 n \frac{d x}{d t}$$

donneraient $x - a = \alpha \sin (2 n t + \beta)$, $u - b = \alpha \cos (2 n t + \beta)$, tandis que

$$\frac{d^2 x}{d t^2} - 2 n \frac{d u}{d t} - n x^2 = 0, \quad \frac{d^2 u}{d t^2} + 2 n \frac{d x}{d t} - n u^2 = 0,$$

intégrées par les règles ordinaires, donnent celles-ci

$$x = (a + \alpha t) \sin n t + (b + \beta t) \cos n t$$
$$u = (a + \alpha t) \cos n t - (b + \beta t) \sin n t,$$

lesquelles, en faisant $x \cos n t - u \sin n t = x'$, $x \sin n t + u \cos n t = u'$, se changeront en

$$x' = b + \beta t, \quad u' = a + \alpha t,$$

équations d'un mouvement rectiligne et uniforme, comme cela doit être.

On observera, que les termes multipliés par n n'ont aucune influence sur la vitesse même du mobile, mais seulement sur sa direction. C'est ce qui résulte immédiatement de ce que les forces, dont ils sont l'expression, sont perpendiculaires à la trajectoire, et on parvient au même résultat en multipliant les équations générales ci-dessus par $2\,dx$, $2\,dy$, $2\,dz$, ajoutant et intégrant, ce qui donne

$$v^2 = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dx) + n^2\left\{x^2 + y^2\sin^2\gamma + z^2\cos^2\gamma - 2yz\sin\gamma\cos\gamma\right\}$$

$$\text{ou } v^2 = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + n^2\left\{x^2 + (y\sin\gamma - z\cos\gamma)^2\right\}$$

Ainsi la vitesse n'est modifiée que par la force centrifuge. D'où il résulte que si l'on fait abstraction de cette dernière force, le mouvement sur une courbe est indépendant de la rotation de la terre, qui modifie seulement la pression du mobile contre la courbe.

Mais il n'en est pas de même lorsque le mobile est assujetti à se mouvoir seulement sur une surface donnée. Alors on a bien l'équation qu'on vient de trouver, mais la seconde équation nécessaire pour déterminer le mouvement contiendra des termes en n. Par exemple, pour un point qui se meut sur un plan horizontal $z = 0$, on a les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2n\frac{dy}{dt}\sin\gamma + n^2x + X$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma + n^2\sin^2\gamma.\,y + Y.$$

On peut remarquer, qu'abstraction faite de la force centrifuge, ces équations sont les mêmes que les équations ci-dessus en x et u, avec la seule différence que n est remplacée par $n\sin\gamma$.

§ 3.

Mouvement du pendule simple en ayant égard à la rotation de la terre.

Après avoir développé les formules générales, je vais d'abord examiner le cas le plus simple du mouvement dont il s'agit, savoir celui où le pendule ne fait que de très-petites oscillations et où le mouvement a lieu dans le vide.

Dans ce cas la trajectoire peut être regardée comme une courbe plane, et si l'on fait $\frac{g}{r} = h^2$, g étant la gravité, combinée avec la force centrifuge locale et r la longueur du pendule, les équations du mouvement sont celles-ci

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt}\sin\gamma + (h^2 - n^2)\,x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma + (h^2 - n^2\sin^2\gamma)\,y = 0.$$

Si l'on observe que n est à peu près $15''$ de degré, c'est-à-dire $< \frac{1}{10000}$, $g = 9,8^{\text{met}}$, on voit que n^2 peut toujours être rejetée vis-à-vis de h^2, même pour le pendule le plus long possible. Les équations deviennent donc en écrivant pour abréger k au lieu de $n\sin\gamma$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2k\frac{dy}{dt} + h^2x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + h^2y = 0.$$

Ces équations s'intègrent par les règles ordinaires en faisant

$$x = E\cos(mt - \varepsilon),\quad y = E\sin(mt - \varepsilon),$$

E et ε étant deux constantes arbitraires. On tire de là, en substituant dans l'une on l'autre des deux équations,

$$m^2 + 2km = h^2$$

donc $m = -k \pm \sqrt{h^2 + k^2} = -k \pm h = -(k \mp h)$, parcequ'on néglige k^2 par rapport à h^2.

On a ainsi

$$x = E_1\cos\left\{(k-h)t + \varepsilon_1\right\} + E_2\cos\left\{(k+h)t + \varepsilon_2\right\}$$

$$y = -E_1\sin\left\{(k-h)t + \varepsilon_1\right\} - E_2\sin\left\{(k+h)t + \varepsilon_2\right\}$$

Lorsque $k = 0$, la trajectoire est une ellipse, comme on l'a remarqué plus haut (§ 1.); pour toute autre valeur de k elle sera une espèce de spirale, donc il suffit d'examiner la marche des maximums du rayon vecteur $\sqrt{x^2 + y^2}$. Or on voit aisément que ce rayon atteint son maximum lorsque

$\cos\left\{2ht + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\right\} = 1$. Si pour plus de simplicité on fait $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, cela a lieu lorsque $t = \frac{\varrho\pi}{h}$, ϱ étant un nombre entier. On a pour ces valeurs, parceque $\frac{\cos}{\sin}(v + \varrho\pi) = \frac{\cos}{\sin}(v - \varrho\pi)$,

$$x = \quad (E_1 + E_2) \cos \left\{ k \frac{\varrho \pi}{h} + \varrho \pi + \varepsilon \right\}$$

$$y = -(E_1 + E_2) \sin \left\{ k \frac{\varrho \pi}{h} + \varrho \pi + \varepsilon \right\},$$

ce qui fait voir que les maximums se trouvent sur la circonférence d'un cercle et que dans le temps d'une oscillation simple le rayon vecteur décrit un angle égal à

$\pi \left(1 + \frac{k}{h} \right) = \pi \left(1 + n \sin \gamma \sqrt{\frac{r}{g}} \right)$ en sens contraire à la rotation de la terre, ce qui est le résultat connu.

On pourrait examiner aussi le minimum du rayon vecteur; mais il vant mieux transformer les coordonnées en posant, de même que dans le § précédent

$$x \cos kt - y \sin kt = x' \qquad x \sin kt + y \cos kt = y'$$

ce qui donne

$$x' = E_1 \cos(ht - \varepsilon_1) + E_2 \cos(ht + \varepsilon_2)$$
$$y' = E_1 \sin(ht - \varepsilon_1) - E_2 \sin(ht + \varepsilon_2).$$

D'où l'on voit que la trajectoire est précisément la même ellipse, qui répond à $k = 0$, mais rendue mobile de sorte que le grand axe prend un mouvement rétrograde avec une vitesse angulaire $= k = n \sin \gamma$.

Les constantes E et ε dépendent de l'état initial; si l'on fait $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, le mobile part de l'axe des x, et en écrivant alors a au lieu de $E_1 + E_2$, b au lieu de $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ on a pour équation de l'ellipse mobile

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

et le mouvement dans cette ellipse sera direct, c-à-d dans le sens de la rotation de la terre lorsque $E_1 > E_2$ et rétrograde lorsque $E_1 < E_2$. Si $E_1 = E_2$ l'ellipse se change en une droite.

On parvient au même résultat en formant d'abord les équations générales du mouvement conique. Prenant z dans la direction de la pesanteur et négligeant les termes dûs à la force centrifuge, on a, en désignant par $-N$ la résistance de la surface sphérique,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{r} + 2n\frac{dy}{dt}\sin\gamma + 2n\frac{dz}{dt}\cos\gamma$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{r} - 2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{r} - 2n\frac{dx}{dt}\cos\gamma + g$$

d'où l'on tire, comme dans le § 1,

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = 2gz + Er^2$$
$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = -2n\frac{x\,dx + y\,dy}{dt} - 2ny\frac{dz}{dt}\cos\gamma.$$

En se bornant aux petites oscillations on négligera le terme $2ny\dfrac{dz}{dt}\cos\gamma$, et alors la seconde équation s'intègre et donne

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = -n\sin\gamma\,(x^2+y^2) + Cr^2.$$

Transformant ces équations en coordonnées polaires, on a en conservant les notations du § 1,

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} + \sin^2\psi\frac{d\varphi^2}{dt^2} - 2\frac{g}{r}\cos\psi = E$$
$$\sin^2\psi\frac{d\varphi}{dt} = -n\sin\gamma\sin^2\psi + C.$$

En éliminant $d\varphi$ on pourra négliger le terme $-n\sin\gamma\sin^2\psi$, et on obtiendra ainsi les deux équations

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{C^2}{\sin^2\psi} - \frac{2g}{r}\cos\psi = E$$
$$\frac{d\varphi}{dt} + n\sin\gamma = \frac{C}{\sin^2\psi}.$$

Dans le cas qui nous occupe la première équation peut se mettre sous la forme

$$h\,dt = \frac{\psi\,d\psi}{\sqrt{(\alpha^2-\psi^2)(\psi^2-\beta^2)}} \quad \text{où } h = \sqrt{\frac{g}{r}},$$

(voyez § 1. pag. 6)

d'où l'on tire, en intégrant de manière que $t=0$ donne $\psi=\alpha$,

$$\psi^2 = \alpha^2\cos^2 ht + \beta^2\sin^2 ht \text{ *)}$$

donc en substituant dans la seconde équation et observant que $C = \alpha\beta h$,

*) Voyez la mécanique de *Poisson* I. p. 392-95.

$$\frac{d\varphi}{dt} + n \sin\gamma = \frac{\alpha\beta h}{\alpha^2 \cos^2 ht + \beta^2 \sin^2 ht},$$

qui est la différentielle de

$$\operatorname{tang}(\varphi + nt \sin\gamma + \text{const}) = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tang} ht,$$

équation qui fait voir le double mouvement du rayon vecteur.

On a ainsi les mêmes équations que pour le pendule non troublé, avec la seule différence que φ est augmenté de $nt \sin\gamma$.

C'est à-peu-près ainsi que ce mouvement a été traité par M. *Binet* (voir comptes rendus 1851 Janv.-Juin pag. 197 et suiv.)

On peut remarquer que $\beta = 0$ donne $\frac{d\varphi}{dt} = -n \sin\gamma$, excepté lorsque $ht = (\mu + \frac{1}{2})\pi$, μ étant un nombre entier; ainsi le mouvement périodique du rayon vecteur, je veux dire celui qui se fait dans le temps d'une double oscillation, ne s'évanouit pas. Du reste, si l'on veut que $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ lorsque $t = 0$, on ne peut pas faire $\beta = 0$. Mais nous reviendrons à cela dans le § suivant.

Reprenons les trois équations ci-dessus en y ajoutant les termes, $-R\frac{dx}{ds}$, $-R\frac{dy}{ds}$, $-R\frac{dz}{ds}$ dus à la résistance de l'air. On en tire ces deux équations:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2gz - 2\int R\,ds + Er^2$$

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = -n\sin\gamma(x^2+y^2) - 2n\cos\gamma\int ydz - \int R\,\frac{xdy - ydx}{ds}\,dt + Cr^2$$

qu'on transforme dans celles-ci en coordonnées polaires

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} + \sin^2\psi\,\frac{d\varphi^2}{dt^2} - 2\,\frac{g}{r}\cos\psi + \frac{2}{r^2}\int R\,ds = E$$

$$\sin^2\psi\,\frac{d\varphi}{dt} + \int R\,\frac{\sin^2\psi\, d\varphi}{ds}\,dt = -n\sin\gamma\sin^2\psi + 2n\cos\gamma\int \sin\varphi\sin^2\psi\,d\psi + C.$$

Conformément aux résultats de l'expérience et des recherches de *Poisson* sur les mouvements simultanés du pendule et de l'air environnant, on peut faire R proportionnel à la vitesse; les équations deviennent par là, c étant une constante,

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} + \sin^2\psi\,\frac{d\varphi^2}{dt^2} - 2\,\frac{g}{r}\cos\psi + \frac{2c}{r^2}\int\frac{ds^2}{dt} = E,$$

$$\sin^2\psi\,\frac{d\varphi}{dt}+c\int\sin^2\psi d\varphi=-n\sin\gamma\sin^2\psi+2n\cos\gamma\int\sin\varphi\sin^2\psi d\psi+C.$$

Quoique ces deux équations ne soient pas intégrables sous forme finie, cependant, si dans les termes de la seconde multipliés par c et n on substitue les valeurs des variables qui répondent aux petites oscillations elliptiques, on peut parvenir à un résultat approché. On a

$$2\int\sin\varphi\sin^2\psi d\psi=2\int\psi\sin\varphi.\,\psi d\psi=\int\psi\sin\varphi d.\,\psi^2.$$

Mais, par ce qui précède,

$$\psi^2=\alpha^2\cos^2 ht+\beta^2\sin^2 ht$$

et par celle-ci combinée avec l'équation de l'ellipse (pag. 6)

$$\psi\sin(\varphi-\delta)=\beta\sin ht$$
$$\psi\cos(\varphi-\delta)=\alpha\cos ht$$

donc $\qquad \psi\sin\varphi=\alpha\cos ht\sin\delta+\beta\sin ht\cos\delta.$

puis $\qquad d.\,\psi^2=-h(\alpha^2-\beta^2)\sin 2ht\,dt.$

D'ailleurs $\qquad \sin^2\psi d\varphi=C\,dt=\alpha\beta h\,dt.$

Substituant ces valeurs on trouve

$$\sin^2\psi\,\frac{d\varphi}{dt}=-c\alpha\beta ht-n\sin\gamma\sin^2\psi$$
$$-n\cos\gamma h(\alpha^2-\beta^2)\int(\alpha\cos ht\sin\delta+\beta\sin ht\cos\delta)\sin 2ht\,dt+\text{const},$$

ou, en observant que

$$\cos ht\sin 2ht\,dt=2\cos^2 ht\sin ht\,dt=-\frac{2}{h}\cos^2 ht\,d.\cos ht$$

$$\sin ht\sin 2ht\,dt=2\sin^2 ht\cos ht\,dt=\quad\frac{2}{h}\sin^2 ht\,d.\sin ht$$

$$\sin^2\psi\,\frac{d\varphi}{dt}=-c\alpha\beta ht-n\sin\gamma\sin^2\psi$$
$$+\frac{2}{3}n\cos\gamma(\alpha^2-\beta^2)(\alpha\cos^3 ht\sin\delta-\beta\sin^3 ht\cos\delta)+\text{const}.$$

Si l'on fait $c=n=0$ on doit avoir const $=C=\alpha\beta h$, donc

$$\sin^2\psi\frac{d\varphi}{dt}=\alpha\beta h(1-ct)-n\sin\gamma\sin^2\psi$$
$$+\frac{2}{3}n\cos\gamma(\alpha^2-\beta^2)(\alpha\cos^3 ht\sin\delta-\beta\sin^3 ht\cos\delta),$$

on bien, en faisant $\sin^2\psi=\psi^2$,

$$\psi^2\,\frac{d\varphi}{dt}=\alpha\beta h(1-ct)-n\sin\gamma\,\psi^2$$
$$+\frac{2}{3}n\cos\gamma(\alpha^2-\beta^2)(\alpha\cos^3 ht\sin\delta-\beta\sin^3 ht\cos\delta).$$

Or des équations ci-dessus on tire

$$\text{tang}\,(\varphi - \delta) = \frac{\beta}{\alpha}\,\text{tang}\,h\,t$$

$$\text{donc}\ \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\delta}{dt} = \frac{\alpha\beta h}{\alpha^2\cos^2 h\,t + \beta^2\sin^2 h\,t} = \frac{\alpha\beta h}{\psi^2},$$

donc en substituant la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\psi^2\frac{d\delta}{dt} = -\alpha\beta h c t - n\sin\gamma\,\psi^2$$
$$+\frac{2}{3}\,n\cos\gamma\,(\alpha^2-\beta^2)\,(\alpha\cos^3 h\,t\sin\delta - \beta\sin^3 h\,t\cos\delta)$$

Cette équation fait voir que la vitesse du grand axe sera sujette à une petite variation à la fois périodique et dépendante de l'azimuth, et qu'elle sera en même temps modifiée par la résistance de l'air; variations auxquelles il faudra encore joindre l'accélération dont nous avons fait mention vers la fin du 1er paragraphe. Mais si l'on fait $\beta = 0$, les deux dernières perturbations indépendantes du mouvement de la terre s'évanouiront, et l'équation se réduit alors à

$$\frac{d\delta}{dt} = -n\sin\gamma + \frac{2}{3}\,n\cos\gamma\,\frac{\alpha^3\cos^3 h\,t}{\psi^2}\,\sin\delta,$$

ou, en observant que $\psi^2 = \alpha^2\cos^2 h\,t$,

$$\frac{d\delta}{dt} = -\,n\sin\gamma + \frac{2}{3}\,n\cos\gamma\,\alpha\cos h\,t\sin\delta.$$

C'est l'inégalité due à la composante de la rotation terrestre autour de la méridienne dont l'effet est à la fois périodique et dépendante de δ, ce qu'il aurait été facile de prévoir sans calcul. Or ce n'est que la variation de cette inégalité due à la variation de δ qui entre en considération; cette variation aura son maximum dans la perpendiculaire à la méridienne, mais il est aisé de voir qu'elle sera du second ordre par rapport à n. Donc il ne paraît pas que la composante dont nous venons de parler puisse donner lieu à aucune inégalité appréciable dépendante de l'azimuth.*)

*) Cet écrit étant sur le point d'être livré à l'impression, un mémoire de M. *Schaar*, qui se trouve parmi ceux de l'Académie royale de Belgique, Tom. XXVI, 1851, m'est venu sous les yeux. Le calcul de l'inégalité en question y est exposé plus en détail, mais le résultat ne paraît pas tout-à-fait exact, quelques petites erreurs s'étant glissées dans les formules pag. 12.

Or ce sont de telles inégalités que divers physiciens, M. M. *Dufour* (comptes rendus 1851, II. pag. 13), *Morren* (c. r. 1851, II. p. 62), *d'Oliveira* (c. r. 1851, II. p. 582) ont aperçues. M. *Dufour* qui a observé une accélération dans la perpendiculaire, dit dans sa communication, que la cause perturbatrice de ce phénomène pourrait bien être la force centrifuge. Nous avons négligé les termes dus à cette force, et quoique cela nous paraisse bien légitime d'après la seule remarque que nous avons faite au commencement de ce §, on peut cependant se convaincre par le calcul, que les modifications, qu'entraine cette force dans le mouvement, seront du second ordre par rapport à n. Il suffira pour cela de considérer les petites oscillations, et on aura ainsi à intégrer les deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2k\frac{dy}{dt} + (h^2 - n^2)x = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + (h^2 - k^2)y = 0$$

où $\quad h = \sqrt{\frac{g}{r}} \quad$ et $\quad k = n \sin\gamma.$

Mais on pourra même se dispenser de ce calcul un peu compliqué, car il suffit évidemment de considérer l'effet de la force centrifuge sous l'équateur où elle agit seule et exerce son plus grand effet. Faisant donc $\sin\gamma = 0$ dans les équations que nous venons d'écrire, on a en intégrant de manière que $t = 0$ donne $x = a,\ y = b,\ \frac{dx}{dt} = 0,\ \frac{dy}{dt} = 0,$

$$x = a\cos\sqrt{h^2 - n^2}\,t \qquad y = b\cos ht$$

d'où l'on voit que le mouvement est le même que celui d'un point qui se meut sans vitesse initiale sur la surface d'un ellipsoide ayant deux axes horizontaux et dirigés vers l'est et vers le nord, et le troisième vertical, et dont les deux rayons de courbure au point le plus bas sont $\frac{g}{h^2 - n^2}$ et $\frac{g}{h^2}$ (voyez la mécanique de *Poisson*, II. pag. 439—41). Or en faisant $a = \varrho\cos\varphi$ $b = \varrho\sin\varphi$, et désignant par ω une quantité tres-petite du second ordre, ces deux équations peuvent s'écrire ainsi

$$x = \varrho\cos\varphi\,(\cos ht + \omega t \sin ht)$$
$$y = \varrho\sin\varphi\cos ht$$

donc

$$y\sin\varphi + x\cos\varphi = \varrho\cos ht + \omega\, t.\varrho\cos^2\varphi\sin ht$$
$$y\cos\varphi - x\sin\varphi = \qquad -\omega\, t.\sin\varphi\cos\varphi\sin ht,$$

d'où l'on voit que la force centrifuge causera une petite déviation du plan d'oscillation vers l'axe des x lorsque φ diffère de zéro ou de 90°. Et sous une latitude quelconque, cette déviation, jointe au mouvement progressif du plan d'oscillation, produira une petite accélération du second ordre lorsque ce plan sera perpendiculaire au méridien.

Ainsi, tout ce qu'on peut tirer de l'analyse précédente à l'egard des inégalités mentionnées, c'est qu'elles sont plus grandes dans la perpendiculaire que dans la méridienne, et si elles peuvent produire une légère ellipticité dans le mouvement, elles feront paraître les effets de l'accélération (§ 1) et de la résistance de l'air. Mais il y a lieu de croire que l'expérience de M. *Foucault* n'est pas susceptible d'une précision suffisante pour rendre appréciables les effets de ces perturbations.

Nous croyons après cela pouvoir affirmer que les inégalités observées ne sont point indiquées par la théorie, et que par conséquent elles doivent être attribuées au mode de suspension du pendule on à quelque autre cause accidentelle que ce soit. En particulier les observations de M. *d'Oliveira* présentent des résultats étranges dont la théorie ne contient la moindre trace. Aussi les expériences faites avec le grand pendule au Panthéon n'ont donné, à ce que je sais, aucune de ces inégalités*).

§ 4.

Mouvement d'un corps solide autour d'un axe qui peut tourner horizontalement autour d'un point, en ayant égard à la rotation de la terre.

Sitôt que M. *Foucault* avait fait connaître son expérience, on en proposait diverses variétés, et nous citons à cet égard les communications à l'Académie des sciences de M. M. *Poinsot* (compt. rend. 1851. I. pag. 206), *Baudrimont* (ibid. pag. 307), de *Tessan* (ibid. pag. 504).

Ces projets nous ont conduit a examiner le mouvement d'un corps solide autour d'un axe qui lui-même peut tourner autour d'un point, en demeurant toujours horizontal, pour savoir, si un tel pendule doit exécuter un mouvement semblable à celui qu'on observe au pendule simple.

*) Elles ne se trouvent pas non plus dans les résultats d'observations faites dans la cathédrale de Cologne. Voyez „*Foucaults* Versuch als directer Beweis der Achsendrehung der Erde, von Dr. *C. Garthe*,“ Köln 1852, pag. 47-48.

Mais avant de soumettre à l'analyse ce mouvement, je vais considérer le cas plus simple qui fait l'objet de la note de M. *Baudrimont*, savoir le mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe et vertical par exemple, dû seulement à la rotation de la terre. Introduisant donc dans l'équation connue (voir p. ex. la mécanique de *Poisson*, II. pag. 95)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}\,\mathbf{S}r^2dm = S(xY - yX)\,dm,$$

où $\frac{d\psi}{dt}$ est la vitesse angulaire, les forces provenant de la rotation de la terre et observant que $dz = 0$, on aura cette équation,

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}\mathbf{S}r^2dm = \mathbf{S}\left\{-2n\frac{xdx+ydy}{dt}\sin\gamma + n^2(\sin^2\gamma - 1)xy - n^2xz\sin\gamma\cos\gamma\right\}dm.$$

Il suffit pour notre objet de considérer le cas où l'axe des z est un des axes principaux passant par l'origine des coordonnées. On a alors $Sxzdm = 0$, et si l'on suppose que les deux autres axes principaux font les angles ψ et $90^0 + \psi$ avec l'axe des x, on a en désignant par ξ, η les coordonnées par rapport à ces axes

$$x = \xi\cos\psi - \eta\sin\psi \qquad y = \xi\sin\psi + \eta\cos\psi,$$

où ξ et η ne dépendent pas de t. Donc

$$\frac{xdx+ydy}{dt} = 0,\ Sxydm = \mathbf{S}(\xi^2 - \eta^2)\,dm\cos\psi\sin\psi = (B - A)\cos\psi\sin\psi,$$

A et B étant les deux momens d'inertie par rapport aux axes des ξ et η (voyez plus bas p. 26). Ainsi l'équation ci-dessus se transforme dans celle-ci, C étant le moment d'inertie par rapport à l'axe des z,

$$C\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = -n^2\cos^2\gamma(B - A)\sin\psi\cos\psi.$$

Supposant $B > A$ et faisant pour abréger $\frac{B-A}{C} = a^2$, on aura, en multipliant par $2d\psi$ et intégrant,

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} = a^2n^2\cos^2\gamma\cos^2\psi + \text{const.}$$

Soit $\frac{d\psi}{dt} = 0$ pour $\psi = \alpha$, donc

$$\frac{d\psi}{dt} = an\cos\gamma\sqrt{\cos^2\psi - \cos^2\alpha} = an\cos\gamma\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\psi},$$

d'où l'on tire, en supposant α très-petit

$$\psi = \alpha\sin(an.\cos\gamma.\,t + \text{const}).$$

On voit donc, que les termes en n dans l'équation différentielle n'ont aucune influence sur ce mouvement, mais que les termes dépendants de la force centrifuge donnent naissance à un mouvement oscillatoire qui sera du premier ordre par rapport à n et aura son maximum à l'équateur. Le premier de ces résultats est une conséquence immédiate de ce que le mouvement d'un point sur une courbe donnée est indépendant de la rotation de la terre lorsqu'on fait abstraction de la force centrifuge, et il est d'ailleurs évident par lui-même. Car si l'on donne à un corps qui peut tourner sur un axe fixe et vertical par exemple, une vitesse angulaire quelconque, il continuera de se mouvoir avec cette vitesse. Or, abandonner ce corps à lui-même sans lui imprimer aucune vitesse, n'est autre chose que de lui communiquer la vitesse même de la rotation de la terre, estimée autour de l'axe fixe; donc le corps demeurera en repos relativement à la terre. Il en est autrement du mouvement du pendule simple, puisque la vitesse initiale n'influe que sur la grandeur des axes de l'ellipse (en supposant de petites oscillations) et nullement sur leur mouvement angulaire. Quant au second résultat, il aurait été aisé de voir sans calcul, que la position d'équilibre stable d'un corps qui, n'étant soumis qu'à l'action de la force centrifuge terrestre, peut tourner sur un axe vertical, est celle dans laquelle l'axe du plus petit moment d'inertie est perpendiculaire au méridien, et que le corps, étant écarté de cette position, tendra par des oscillations à y revenir. Mais il serait peut-être impossible de vérifier cela directement par l'expérience à cause de l'extrême petitesse de la force motrice; donc il ne paraît pas que l'expérience qu'a projetée M. *Baudrimont* puisse conduire à aucun résultat utile.

Considérons maintenant le mouvement d'un corps autour d'un axe qui lui-même peut tourner autour d'un point fixe et dans un plan horizontal.

Supposons que l'axe mobile soit un des axes principaux par le point fixe, et nommons cet axe et les deux autres axes principaux les axes des ξ, η, ζ. Soient x, y, z trois coordonnées, rapportées a trois axes rectangulaires fixes par rapport à la terre et dirigés comme dans les équations générales établies § 2, c'est-à-dire x vers l'est, y vers le nord et z vertical de bas en haut. Soient de plus ψ et θ les angles qui déterminent la position des axes des ξ, η, ζ par rapport a ceux des x, y, z, comptés comme les angles désignés par les mêmes lettres dans le § 2. Faisons pour abréger $a = \cos\psi$, $a' = \sin\psi$, $b = \cos\theta$, $b' = \sin\theta$ et

$$p = \frac{d\theta}{dt}, \quad q = \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}, \quad r = \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt},$$

$S(yZ - zY)dm = M$, $S(zX - xZ)dm = M'$, $S(xY - yX) = M''$, de sorte que M, M', M'' représentent les momens des forces motrices par rapport aux axes des x, y, z; soit enfin P une pression inconnue verticale qui retient l'axe dans la position horizontale; supposant cette pression appliquée au point x_1, y_1 de l'axe, elle produira les deux momens Py, Px qui peuvent s'exprimer par un couple V décomposé en deux autres de signes contraires Va', $-Va$. Cela posé, en désignant par A, B, C les trois momens d'inertie par rapport aux axes principaux des ξ, η, ζ, on aura pour équations du mouvement

$$\begin{aligned} aAp - a'bBq + a'b'Cr &= \int M\,dt + \int Va'\,dt \\ a'Ap + abBq - ab'Cr &= \int M'dt - \int Va\,dt \\ b'Bq + bCr &= \int M''dt. \end{aligned}$$

Si l'on différencie ces équations, qu'on les multiplie respectivement par a, a', 0; $-a'b$, ab, b'; $a'b'$, $-ab'$, b, et qu'on les ajoute ensuite, on trouve par les relations connues

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = N$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = N' - bV$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)qp = N'' + b'V,$$

où $N = aM + a'M'$, $N' = -a'bM + abM' + b'M''$, $N'' = a'b'M - ab'M' + bM''$, de sorte que N, N', N'' sont les trois momens autour des axes principaux.*)

Eliminant V des deux dernières et substituant les valeurs de p, q, r on a les deux équations suivantes

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} + (C - B)\sin\theta\cos\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2} = N \;\ldots\ldots\; (1.)$$

$$(B\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2(B - C)\sin\theta\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}$$
$$= N'\sin\theta + N''\cos\theta \ldots (2.)$$

---

*) Pour ces formules on peut voir p. ex. *Pontécoulant* théorie anal. du syst. du monde, vol. I. p. 116-119.

Or j'observe que $B\sin^2\theta + C\cos^2\theta$ est le moment d'inertie autour de l'axe des z qui a lieu au bout du temps t, que $2(B - C)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$ est la différentielle de ce moment d'inertie, et que $N'\sin\theta + N''\cos\theta$ est le moment des forces motrices autour de l'axe des z, $= M''$. Donc si l'on fait $B\sin^2\theta + C\cos^2\theta = H$, les deux équations peuvent s'écrire ainsi,

$$A\,\frac{d^2\theta}{dt^2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{dH}{d\theta}\,\frac{d\psi^2}{dt^2} = N$$

$$\frac{d\left\{H\,\frac{d\psi}{dt}\right\}}{dt} = M'',$$

ce qui suffit pour mettre en évidence le sens des équations (1, 2), en remarquant que $\tfrac{1}{2}\,\frac{dH}{d\theta}\,\frac{d\psi^2}{dt^2} = -Svz\,\frac{d\psi^2}{dt^2}\,dm$ (pag. 8) est le moment autour de l'axe des ξ de la force centrifuge due à la rotation autour de l'axe vertical.

Si l'on veut appliquer ces équations au mouvement dont nous parlons, en ayant égard à la rotation de la terre, il faut faire (§ 2).

$$X = \quad 2n\,\frac{dy}{dt}\sin\gamma - 2n\,\frac{dz}{dt}\cos\gamma + n^2x$$

$$Y = -2n\,\frac{dx}{dt}\sin\gamma + n^2y\sin^2\gamma - n^2z\sin\gamma\cos\gamma$$

$$Z = \quad 2n\,\frac{dx}{dt}\cos\gamma + n^2z\cos^2\gamma - n^2y\sin\gamma\cos\gamma - g$$

Nous n'avons pas supprimé les termes en n^2, mais on verra qu'on peut se dispenser d'avoir égard à la résistance de l'air. Maintenant pour former les expressions de N et M'' on a ces formules de transformation (pag. 8)

$$\begin{aligned} x &= a\xi - a'b\eta + a'b'\zeta \\ y &= a'\xi + ab\eta - ab'\zeta \\ z &= \qquad\quad b'\eta + b\zeta, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{dt} = (-a'\xi - ab\eta + ab'\zeta)\frac{d\psi}{dt} + (a'b'\eta + a'b\zeta)\frac{d\theta}{dt} = -y\,\frac{d\psi}{dt} + a'z\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = (a\xi - a'b\eta + a'b'\zeta)\frac{d\psi}{dt} - (ab'\eta + ab\zeta)\frac{d\theta}{dt} = x\,\frac{d\psi}{dt} - az\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \qquad (b\eta - b'\zeta)\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Or on a $N = aM + a'M' = S\left\{a(yZ - zY) + a'(zX - xZ)\right\} dm$

$$= S\left\{Z(ay - a'x) - z(aY - a'X)\right\} dm.$$

Mais les équations précédentes donnent en supprimant d'abord les termes en n^2

$$Z(ay - a'x) = 2n\cos\gamma\left\{(-a'\xi - ab\eta + ab'\zeta)\frac{d\psi}{dt} + (a'b'\eta + a'b\zeta)\frac{d\theta}{dt}\right\}\left\{b\eta - b'\zeta\right\} - g\left\{b\eta - b'\zeta\right\}$$

$$z(aY - a'X) = -z.\,2n\sin\gamma\left(a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt}\right) + z.\,2n\cos\gamma\, a'\frac{dz}{dt}$$

$$= 2n\sin\gamma(b'\eta + b\zeta)(b\eta - b'\zeta)\frac{d\psi}{dt} + 2n\cos\gamma(b'\eta + b\zeta)a'(b\eta - b'\zeta)\frac{d\theta}{dt}.$$

Soustrayant la seconde de ces valeurs de la première, on voit que les termes multipliés par $\frac{d\theta}{dt}$ se détruisent, et les autres donnent, en se rappelant que les axes des ξ, η, ζ sont des axes principaux

$$S\left\{Z(ay - a'x) - z(aY - a'X)\right\} dm = -2n\cos\gamma\, a(b^2 S\eta^2 dm + b'^2 S\zeta^2 dm)\frac{d\psi}{dt}$$
$$-2n\sin\gamma\, bb'(S\eta^2 dm - S\zeta^2 dm)\frac{d\psi}{dt} - g\left\{bS\eta\, dm - b'S\zeta\, dm\right\}$$

Or on a par les propriétés des momens d'inertie

$$S\xi^2 dm = \tfrac{1}{2}(-A + B + C),\quad S\eta^2 dm = \tfrac{1}{2}(A - B + C),\quad S\zeta^2 dm = \tfrac{1}{2}(A + B - C).$$

De plus, en supposant que l'axe des ζ passe par le centre de gravité, de sorte qu'on ait pour ce point $\eta = 0$, $\zeta = -\varrho$, on a $bS\eta\, dm - b'S\zeta\, dm = b'm\varrho$. Ecrivant donc au lieu de a, b, b' leurs valeurs, les termes que nous venons de calculer deviendront

$$-n\cos\gamma\left\{A - (B - C)\cos 2\theta\right\}\cos\psi\frac{d\psi}{dt} + n\sin\gamma(B - C)\sin 2\theta\frac{d\psi}{dt} - gm\varrho\sin\theta.$$

Les termes multipliés par n^2 donnent, en désignant par $Z(ay - a'x)$ &c. ces termes

$$Z(ay - a'x) = n^2\left\{(b'\eta + b\zeta)\cos^2\gamma - (a'\xi + ab\eta - ab'\zeta)\sin\gamma\cos\gamma\right\}\left\{b\eta - b'\zeta\right\}$$

$$z(aY - a'X) = n^2\left\{b'\eta + b\zeta\right\}\left\{(aa'\xi + a^2b\eta - a^2b'\zeta)\sin^2\gamma - a(b'\eta + b\zeta)\sin\gamma\cos\gamma - (aa'\xi - a'^2b\eta + a'^2b'\zeta)\right\},$$

d'où l'on tire par les propriétés des axes principaux

$$S(Z(ay-a'x))dm=n^2\left\{bb'(S\eta^2dm-S\zeta^2dm)\cos^2\gamma-a(b^2S\eta^2dm+b'^2S\zeta^2dm)\sin\gamma\cos\gamma\right\}$$

$$S(z(aY-a'X))dm=n^2\left\{a^2bb'(S\eta^2dm-S\zeta^2dm)\sin^2\gamma-a(b'^2S\eta^2dm+b^2S\zeta^2dm)\sin\gamma\cos\gamma\right.$$
$$\left.+a'^2bb'(S\eta^2dm-S\zeta^2dm)\right\}.$$

Observant que $\cos^2\gamma-a^2\sin^2\gamma-a'^2=-\sin^2\gamma+\cos^2\psi\cos^2\gamma$ la différence de ces valeurs qui contient les termes en question peut se mettre sous la forme

$$n^2\left\{(\sin^2\gamma-\cos^2\psi\cos^2\gamma)\sin\theta\cos\theta+\cos\psi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\gamma\cos\gamma\right\}\left\{B-C\right\}.$$

Enfin $N'\sin\theta+N''\cos\theta=M''=S(xY-yX)\,dm$. Mais les valeurs de X et Y donnent

$$xY-yX=2ny\frac{dz}{dt}\cos\gamma-2n\frac{xdx+ydy}{dt}\sin\gamma-n^2xy\cos^2\gamma-n^2xz\sin\gamma\cos\gamma.$$

Substituant les valeurs de x, y, z et leurs différentielles, multipliant par dm et intégrant, on a

$$M''=\left\{2na(b^2S\eta^2dm+b'^2S\zeta^2dm)\cos\gamma+2nbb'(S\eta^2dm-S\zeta^2dm)\sin\gamma\right\}\frac{d\theta}{dt}$$
$$-n^2aa'(S\xi^2dm-b^2S\eta^2dm-b'^2S\zeta^2dm)\cos^2\gamma+n^2a'bb'(S\eta^2dm-S\eta^2dm)\sin\gamma\cos\gamma,$$

ce qu'on peut écrire ainsi

$$M''=n\cos\gamma\left\{A-(B-C)\cos2\theta\right\}\cos\psi\frac{d\theta}{dt}-n\sin\gamma(B-C)\sin2\theta\frac{d\theta}{dt}$$
$$-n^2\sin\psi\left\{(B\cos^2\theta+C\sin^2\theta-A)\cos\psi\cos^2\gamma+\cos\theta\sin\theta(B-C)\sin\gamma\cos\gamma\right\}$$

Substituant ces valeurs dans les équations 1 et 2 on aura ces deux équations

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}+(C-B)\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}=-gm\varrho\sin\theta$$
$$-n\left\{[A-(B-C)\cos2\theta]\cos\gamma\cos\psi-(B-C)\sin\gamma\sin2\theta\right\}\frac{d\psi}{dt}$$
$$+n^2\left\{(\sin^2\gamma-\cos^2\psi\cos^2\gamma)\sin\theta\cos\theta+\sin\gamma\cos\gamma\cos\psi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right\}\left\{B-C\right\},$$

$$(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta)\frac{d^2\psi}{dt^2}+2(B-C)\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$
$$=n\left\{[A-(B-C)\cos2\theta]\cos\gamma\cos\psi-(B-C)\sin\gamma\sin2\theta\right\}\frac{d\theta}{dt}$$
$$-n^2\left\{\cos^2\gamma\sin\psi\cos\psi(B\cos^2\theta+C\sin^2\theta-A)+\sin\gamma\cos\gamma\sin\psi\cos\theta\sin\theta(B-C)\right\}.$$

D'ou l'on peut déduire celle-ci en multipliant la première par $2d\theta$ et la seconde par $2d\psi$, ajoutant et intégrant

$$A\frac{d\theta^2}{dt^2}+(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta)\frac{d\psi^2}{dt^2}=2gm\varrho\cos\theta-n^2\Big\{(\sin^2\gamma-\cos^2\psi\cos^2\gamma)$$

$$\times(B\cos^2\theta+C\sin^2\theta-A)-\sin\gamma\cos\gamma\cos\psi\sin2\theta(B-C)\Big\}+\text{const},$$

qui est l'équation des forces vives, laquelle ne doit pas contenir les termes en n, comme nous l'avons observé plus haut.

Quoiqu'on ne puisse pas intégrer généralement ces équations, on en peut cependant tirer des résultats qui suffisent pour notre objet, et que nous allons exposer.

Si l'on fait pour un moment $n=0$, on a les deux intégrales

$$A\frac{d\theta^2}{dt^2}+(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta)\frac{d\psi^2}{dt^2}=2gm\varrho\cos\theta+E$$

$$(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta)\frac{d\psi}{dt}=F$$

E et F étant deux constantes arbitraires. On tire de là

$$dt=\frac{\sqrt{A(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta)}\;d\theta}{\sqrt{(2gm\varrho\cos\theta+E)(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta)-F^2}}$$

$$d\psi=\frac{F\,dt}{B\sin^2\theta+C\cos^2\theta},$$

équations qui déterminent, comme pour le pendule simple, les valeurs périodiques des deux vitesses $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$. Or on voit par l'inspection de ces formules, que θ peut devenir égal à zéro lorsque $(2gm\varrho+E)\;C>F^2$, et que $\frac{d\psi}{dt}$ sera constamment très-petit lorsqu'on donne à F une valeur très-petite; résultats qui n'ont pas lieu pour le pendule simple, dans lequel se transforme celui dont nous parlons lorsqu'on fait $A=B=m\varrho^2$, $C=0$; et le dernier pas même lorsque $F=0$. On peut remarquer que si $B=C$, le mouvement horizontal est entièrement indépendant du mouvement vertical.

Cela posé, supposons que le corps soit un pendule oscillant autour de sa position d'équilibre, et que $\frac{d\psi}{dt}$ soit une très-petite quantité de l'ordre de n. Négligeant donc les carrés de ces quantités, la première équation (pag. préc.) donne

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} = - g m \varrho \sin \theta$$

donc
$$A \frac{d\theta^2}{dt^2} = 2 g m \varrho (\cos \theta - \cos \alpha)$$

ce qui est l'équation ordinaire pour le mouvement du pendule, d'où l'on tire, lorsque $\sin \theta = \theta$,

$$\theta = \alpha \cos \sqrt{\frac{g m \varrho}{A}}\, t$$

La troisième équation se trouve ainsi réduite à celle-ci

$$(B \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \frac{d\psi^2}{dt^2} = - n^2 \Big\{ (\sin^2 \gamma - \cos^2 \psi \cos^2 \gamma)(B \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta - A) - \sin \gamma \cos \gamma \cos \psi \sin 2\theta (B - C) \Big\} + \text{const}$$

Or la quantité $B \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta$ est au bout du temps t le moment d'inertie autour de la verticale et $B \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta$ le moment d'inertie autour de l'axe horizontal perpendiculaire à l'axe d'oscillation ou des ξ; ces deux momens ont leurs différentielles égales et de signes contraires; et si pour de petites oscillations on néglige ces variations, on a en désignant par V le dernier de ces momens, $\frac{dV}{d\theta} = - \sin 2\theta (B - C) = 0$, et en comprenant le terme $- n^2 \sin^2 \gamma (V - A)$ dans la constante arbitraire, l'équation que nous venons d'écrire se réduit à celle-ci

$$(B \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \frac{d\psi^2}{dt^2} = n^2 \cos^2 \psi \cos^2 \gamma (V - A) + \text{const.}$$

Si l'on suppose $V < A$, on peut donner à cette équation la forme

$$(B \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \frac{d\psi^2}{dt^2} = n^2 \sin^2 \psi \cos^2 \gamma (A - V) + \text{const.}$$

D'où l'on peut conclure que si V diffère de A, l'axe d'oscillation aura un mouvement oscillatoire autour d'une des positions qui répondent à $\psi = 0$ ou à $\psi = 90°$, c'est-à-dire à la direction vers l'est ou vers le nord, et semblable à celui dont nous avons parlé plus haut (pag. 22), avec la condition du reste que cet axe n'ait point un mouvement révolutif, ce que nous allons examiner tout à l'heure. Mais il ne faut pas oublier que ces conclusions supposent $\frac{d\psi}{dt}$ constamment très-petite, car sans cela la première équation ne se réduirait point à l'équation ordinaire pour le mouvement du pendule.

Voyons maintenant ce que donne la seconde équation ci-dessus. Si l'on néglige les termes en n^2, et si l'on fait d'abord abstraction du terme $n \left\{ A - (B - C) \cos 2\theta \right\} \cos\gamma \cos\psi \frac{d\theta}{dt}$ qui revient à $2n\, Sy \frac{dz}{dt}\, dm \cos\gamma$ exprimé en d'autres coordonnées, l'équation deviendra

$$(B\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2(B - C)\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt} = -n(B - C)\sin\gamma\sin 2\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Faisant pour abréger la vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt} = \omega$, le moment d'inertie $B\sin^2\theta + C\cos^2\theta = \tau$, cette équation peut s'écrire ainsi

$$d(\tau\omega) = -n\sin\gamma\, d\tau.$$

Supposons à l'origine du mouvement $\tau = \tau_0$, $\omega = 0$, donc, en intégrant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t$,

$$\tau\omega = -n\sin\gamma(\tau - \tau_0).$$

Cette équation convient également au cas où ω ne conserve pas toujours une valeur très-petite et au cas contraire, mais elle mène à des conséquences différentes dans les deux cas.

Dans le premier cas il faut, suivant ce qu'on a remarqué plus haut, que C soit une quantité très-petite, parce qu'on ne donne au mobile aucune vitesse horizontale (voyez plus haut pag. 28) et on pourra même supposer $C = 0$, ce qui est le cas du pendule simple où l'on a de plus $A = B = m\varrho^2$. L'équation devient alors

$$\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = -n\sin\gamma(\sin^2\theta - \sin^2\alpha)$$

α étant l'angle qui répond à τ_0. Cette équation fait voir que la vitesse angulaire de l'axe sera périodique, mais constamment dirigée dans le sens de la rotation de la terre, parcequ'on suppose que θ ne surpasse pas α. Or il est facile de voir, que ce mouvement provient du mouvement elliptique direct du pendule dont nous avons parlé plus haut (pag. 16.) et qui entraine celui de l'axe. Mais ce mouvement direct est accompagné d'un mouvement rétrograde du grand axe de l'ellipse, et l'équation

$$\frac{d\psi}{dt} + n \sin\gamma = \frac{n \sin\gamma \sin^2\alpha}{\sin^2\theta}$$

coïncide aussi avec l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} + n \sin\gamma = \frac{C}{\sin^2\psi}, \quad \text{(pag. 16)}$$

lorsqu'on détermine C de manière que $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ lorsque $\psi = \alpha$.
On peut remarquer que la supposition que θ ne surpasse jamais α, répond à celle qu'on n'ait donné au mobile aucune vitesse initiale dans le plan d'oscillation. Or c'est ce qui n'est pas nécessaire, et on pourra même supposer $\alpha = 0$, ce qui donne simplement

$$\frac{d\psi}{dt} = -n \sin\gamma,$$

et alors le plan d'oscillation aura un mouvement rétrograde uniforme. Dans ce cas le mouvement périodique paraît s'évanouir, mais il faut observer que c'est l'ellipse mobile qui se transforme en une droite mobile et on a aussi $\frac{d\psi}{dt} = \frac{0}{0}$ lorsque $\theta = 0$.

Ainsi donc, lorsqu'on fait partir le pendule d'une position qui n'est pas celle de l'équilibre, il passera à la 1re 3me 5me &c. oscillation à droite de la verticale; au contraire, quand le pendule part de sa position d'équilibre, il passera à chaque oscillation par la verticale. Le premier de ces résultats est analogue avec la déviation du tir horizontal (voy. le mém. de *Poisson*, journ. de l'éc. polyt. cah. 26, pag. 49) mais il est naturellement inappréciable par l'expérience.

Dans le second cas la formule ci-dessus revient à l'équation suivante

$$\left\{(B-C)\sin^2\theta + C\right\}\frac{d\psi}{dt} = -n \sin\gamma\,(B-C)\,(\sin^2\theta - \sin^2\alpha)$$

en supposant que l'angle α réponde au moment d'inertie τ_0, ou bien, en faisant pour abréger $\frac{C}{B-C} = c^2$,

$$\frac{d\psi}{dt} = -n \sin\gamma \frac{\sin^2\theta - \sin^2\alpha}{\sin^2\theta + c^2}$$

Cette équation fait voir que si le pendule part de l'angle α sans vitesse initiale, le mouvement horizontal sera direct (dans le sens de la rotation de la terre) avec une vitesse croissante depuis $\theta = \alpha$ jusqu'à $\theta = 0$ et ensuite décroissante depuis $\theta = 0$ jusqu'à

$\theta = \alpha$, et si le pendule part de la position d'équilibre, en sorte que $\alpha = 0$, le mouvement horizontal sera rétrograde et de même alternativement croissante et décroissante. Mais puisque c^2 n'est pas une quantite très-petite, ces mouvements seront insensibles, parceque θ et α sont des quantités peu considérables.

Le terme $n[A - (B - C)\cos 2\theta]\cos\gamma\cos\psi\,\frac{d\theta}{dt} = 2n\,Sy\,\frac{dz}{dt}dm\cos\gamma$ ne peut donner lieu qu'à une petite inégalité périodique qui dans le cas de $C = 0$ revient à celle dont nous avous parlé plus haut pag. 18-19; dans le cas contraire, où $\frac{d\psi}{dt}$ conserve une valeur très-petite, on peut supposer ψ constant lorsqu'on intègre par rapport à θ. Mais il est inutile de nous arrêter davantage sur cette perturbation.

Ainsi dans le mouvement du pendule que nous avons considéré, la déviation du plan d'oscillation en sens contraire à la rotation de la terre n'a pas lieu comme dans le mouvement du pendule simple, mais l'oscillation du pendule est seulement accompagnée de petits mouvements du plan d'oscillation, qui seront inappréciables par l'expérience.

On remarquera que $\tau\omega = - n\sin\gamma(\tau - \tau_0)$ est précisément l'équation à laquelle Mr. *Poinsot* est parvenu d'une autre manière dans les remarques communiquées à l'Académie des sciences à l'occasion du mémoire de Mr. *Binet* (compt. rend. 1851. I. p. 206), et en effet elle n'est autre chose que l'expression du mouvement apparent causé par le changement de vitesse angulaire en vertu du changement du moment d'inertie. Mais pour le pendule ce changement continue et rend ainsi le mouvement moins sensible.

En terminant ce mémoire je vais dire un mot sur la note de Mr. *de Tessan* (compt. rend. 1851. I. p. 504). Voici son raisonnement: „Supposons une barre rigide suspendue horizontalement par son centre de gravité à un fil sans torsion; supposons la en repos relativement à l'horizon: elle aura alors, *en réalité*, comme l'horizon, un mouvement de rotation *direct* autour de la verticale, c'est-à-dire autour du fil de suspension. Supposons qu'alors la barre, sans sortir du plan vertical qui la contient, vienne à effectuer un mouvement qui la change *bout pour bout*. La grandeur et la direction absolues de la vitesse réelle de chacun des points de la barre autour de la verticale ne seront pas changées; mais comme chaque point aura changé de côté par rapport à la verticale, il en résultera que le mouvement réel autour de la verticale s'effectuera en sens inverse de ce qu'il était d'abord, c'est-à-dire qu'il sera *rétrograde* et aura la même vitesse absolue qu'auparavant. La vitesse du mouvement relatif, à l'égard de l'horizon, c'est-à-dire la vitesse mesurable, sera donc double de celle du mouvement réel de cet horizon et égale à la vitesse de l'aiguille des heures d'une montre, multipliée par le sinus de la latitude."

Mais si ce raisonnement était exact, il s'ensuivrait que si le plan d'oscillation du pendule, dont nous venons de parler, avait un mouvement révolutif horizontal, et que l'on fît faire au pendule une oscillation simple, la direction de la vitesse angulaire horizontale changerait de signe. Or c'est ce qui n'est pas conforme avec l'équation différentielle

$$d(\tau\omega) = -n \sin\gamma . d\tau;$$

pour qu'il le fût, il faudrait, qu'en intégrant cette équation depuis $\theta = \alpha$ jusqu'à $\theta = -\alpha$ on eût $\omega = 0$, $\tau = \tau_0$ pour $\theta = \alpha$ et $\omega = \omega$, $\tau = -\tau_0$ pour $\theta = -\alpha$, ce qui donnerait

$$-\tau_0\,\omega = -n \sin\gamma\,(-\tau_0 - \tau_0)$$

ou bien $$\omega = -2n \sin\gamma,$$

ce qui n'est pas exact. Et on conçoit aussi que par le changement bout pour bout de la barre, effectué par une demi-révolution verticale, il ne s'opère pas un changement brusque de direction de la vitesse, mais par le premier quart-de-révolution la barre gagnera une vitesse angulaire horizontale qu'il perdra par le second, ce qui est bien d'accord avec le résultat du calcul.

Addition au mémoire précédent.

Après que le mémoire, qu'on vient de lire, eut été achevé, les expériences imaginées par MM. *Sire*, *Person* et *Foucault* furent communiquées à l'Académie des sciences de Paris dans la séance du 27 Sept. 1852. Ces expériences confirment la différence signalée dans le § 4 ci-dessus, entre le mouvement d'un corps qui peut pirouetter en tout sens autour d'un point fixe à la surface de la terre et celui d'un corps qui n'a que la liberté de tourner autour d'un axe, assujetti à passer par un point fixe et à tourner dans un plan directeur fixe. Le mobile étant, comme dans ces expériences, un solide de révolution qui tourne autour de son axe de figure, et le point fixe étant le centre de gravité, les formules relatives au dernier mode de mouvement sont des cas particuliers des formules trouvées § 4 pag. 27 (en bas). J'ai communiqué les résultats de ce calcul à l'Académie des sciences de Copenhague dans la séance du 5 Nov. 1852 et ils sont conformes à ceux des recherches de M. *Quet* communiqués à l'Ac. des sc. de Paris dans la séance du 8 Nov. 1852.

Voici comment on y parvient.

Faisant dans les deux équations pag. 27, $B = C$, $\varrho = 0$, on a

$$A\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,nA\cos\gamma\cos\psi\,\frac{d\psi}{dt},$$

$$B\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = nA\cos\gamma\cos\psi\,\frac{d\theta}{dt} - n^2\cos^2\gamma\sin\psi\cos\psi\,(B - A).$$

La première donne par l'intégration

$$A\,\frac{d\theta}{dt} = -\,nA\cos\gamma\sin\psi + A\omega,$$

ω étant une constante, à très-peu près égale à la vitesse angulaire imprimée au mobile. Substituant dans la seconde on a

$$B\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = nA\omega\cos\gamma\cos\psi - n^2B\cos^2\gamma\sin\psi\cos\psi.$$

Négligeant le terme multiplié par n^2 et faisant $\psi = 90^0 + \varphi$, on trouve

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\,\frac{n\omega A}{B}\cos\gamma\sin\varphi.$$

D'ou l'on peut conclure: 1°, que les positions d'équilibre sont celles qui répondent à $\varphi = 0$ ou à $\varphi = 180^0$, c'est-à-dire celles où l'axe du mobile est dirigé dans le méridien; 2°, que si l'on suppose ω positif, c'est-à-dire si le mobile tourne de manière qu'étant regardé du coté positif de l'axe, il s'élève à droite, l'équilibre sera stable lorsque $\varphi = 0$, ou bien lorsque la rotation a lieu dans le sens du mouvement diurne de la terre, et instable dans le cas contraire; 3°, que l'axe fera autour de sa position d'équilibre stable des oscillations synchrones avec celles du pendule simple dont la longueur est

$$l = \frac{Bg}{n\omega A \cos\gamma},$$

et par conséquent le temps d'une oscillation très-petite

$$t = \pi \sqrt{\frac{B}{n\omega A \cos\gamma}}.$$

On peut remarquer qu'à la rigueur ce résultat n'est qu'approximatif, et que le terme que nous avons négligé produit l'oscillation dont nous avons parlé plus haut (pag. 22, 23), oscillation qui reste seule si l'on suppose $\frac{d\theta}{dt} = 0$.

De ces équations on tire immédiatement celles qui conviennent au cas où le plan directeur est le méridien. En effet, si l'on observe qu'un méridien quelconque est parallèle à l'horizon d'un lieu placé sous l'équateur à une distance de 90° de longueur de ce méridien, il n'y a qu'à faire $\gamma = 0$; donc on aura cette proposition:

„Si le plan directeur de l'axe du mobile est le méridien, la position d'équilibre stable de l'axe est parallèle à l'axe terrestre, le mobile tournant dans le même sens que la terre, et les oscillations autour de cette position seront synchrones avec celles du pendule dont la longueur est

$$l = \frac{Bg}{n\omega A}.$$

Et généralement, lorsqu'une perpendiculaire au plan directeur fait un angle δ avec l'axe terrestre, la position d'équilibre stable est celle qui réduit au minimum l'angle compris entre l'axe du mobile et l'axe terrestre, de manière que la rotation a lieu dans le sens du mouvement diurne de la terre, et les oscillations seront synchrones avec celles du pendule dont la longueur est

$$l = \frac{Bg}{n\omega A \sin\delta}.$$

Lorsque $\delta = 0$, l'axe du mobile reste toujours perpendiculaire à l'axe terrestre, et l'équilibre subsiste dans une position quelconque."

Nous examinerons plus bas le mouvement d'un solide de révolution dont l'axe peut tourner dans la surface d'un cône circulaire.

Nous allons maintenant considérer le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe à la surface de la terre. Soient x, y, z les coordonnées par rapport à des axes fixes à la surface de la terre et dirigées comme auparavant, savoir: x vers l'est, y vers le nord et z vers le zénith, ξ, η, ζ les coordonnées par rapport aux axes principaux, passant par le point fixe. Soient de plus

$$\begin{aligned} x &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta \\ y &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta \\ z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= -\cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi \\ b &= -\cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi \\ c &= \sin\theta \sin\psi, \\ a' &= \cos\theta \cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi \\ b' &= \cos\theta \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \\ c' &= -\sin\theta \cos\psi, \\ a'' &= \sin\theta \sin\varphi \\ b'' &= \sin\theta \cos\varphi \\ c'' &= \cos\theta, \end{aligned}$$

ψ étant l'angle que forme avec l'axe des x l'intersection des plans xy et $\xi\eta$, compté positivement depuis $+x$ vers $+y$, φ l'angle que forme l'axe des ξ avec cette intersection, compté positivement dans le sens de $+\xi$ vers $+\eta$, et θ l'angle compris entre $+z$ et $+\zeta$, compté positivement dans le même sens, l'angle étant regardé du côté positif de l'intersection.

Cela posé, si l'on fait

$$S\,(\eta^2+\zeta^2)\,dm = A,\quad S\,(\xi^2+\zeta^2)\,dm = B,\quad S\,(\xi^2+\eta^2)\,dm = C,$$

de sorte que A, B, C soient les trois momens d'inertie autour des axes principaux ξ, η, ζ, on aura pour équations du mouvement

$$\left.\begin{aligned} A\,\frac{dp}{dt} + (C-B)\,q\,r &= S\left\{\eta\,\Sigma - \zeta\,\Upsilon\right\} dm \\ B\,\frac{dq}{dt} + (A-C)\,r\,p &= S\left\{\zeta\,\Xi - \xi\,\Sigma\right\} dm \\ C\,\frac{dr}{dt} + (B-A)\,q\,p &= S\left\{\xi\,\Upsilon - \eta\,\Xi\right\} dm, \end{aligned}\right\}\quad (1.)$$

Ξ, Υ, Σ étant les composantes des forces accélératrices parallèles aux axes des ξ, η, ζ, et si l'on désigne par X, Y, Z les composantes des mêmes forces parallèlement aux axes des x, y, z, on a

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= aX + a'Y + a''Z \\ \Upsilon &= bX + b'Y + b''Z \\ \Sigma &= cX + c'Y + c''Z. \end{aligned}\right\} \text{(a.)}.$$

De plus, les valeurs de p, q, r sont données par les équations

$$\left.\begin{aligned} p &= \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} \\ q &= \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt} \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right\} \text{(2.)}$$

Et on a en outre les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} a &= b'c'' - b''c' & a' &= b''c - bc'' & a'' &= bc' - b'c \\ b &= c'a'' - c''a' & b' &= c''a - ca'' & b'' &= ca' - c'a \\ c &= a'b'' - a''b' & c' &= a''b - ab'' & c'' &= ab' - a'b, \end{aligned}\right\} \text{(b.)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= br - cq & \frac{da'}{dt} &= b'r - c'q & \frac{da''}{dt} &= b''r - c''q \\ \frac{db}{dt} &= cp - ar & \frac{db'}{dt} &= c'p - a'r & \frac{db''}{dt} &= c''p - a''r \\ \frac{dc}{dt} &= aq - bp & \frac{dc'}{dt} &= a'q - b'p & \frac{dc''}{dt} &= a''q - b''p. \end{aligned}\right\} \text{(c.)}$$

Maintenant, supposons d'abord que le point fixe soit le centre de gravité du corps, substituons pour X, Y, Z les forces provenant de la rotation de la terre et négligeons les termes multipliés par n^2. On aura alors

$$\begin{aligned} X &= \quad 2n\frac{dy}{dt} \sin\gamma - 2n \frac{dz}{dt} \cos\gamma \\ Y &= -2n\frac{dx}{dt} \sin\gamma \\ Z &= \quad 2n\frac{dx}{dt} \cos\gamma, \end{aligned}$$

d'ailleurs
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \xi \frac{da'}{dt} + \eta \frac{db'}{dt} + \zeta \frac{dc'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \xi \frac{da''}{dt} + \eta \frac{db''}{dt} + \zeta \frac{dc''}{dt}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\Xi = 2n\sin\gamma\left\{\left(a\frac{da'}{dt} - a'\frac{da}{dt}\right)\xi + \left(a\frac{db'}{dt} - a'\frac{db}{dt}\right)\eta + \left(a\frac{dc'}{dt} - a'\frac{dc}{dt}\right)\zeta\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{\left(a\frac{da''}{dt} - a''\frac{da}{dt}\right)\xi + \left(a\frac{db''}{dt} - a''\frac{db}{dt}\right)\eta + \left(a\frac{dc''}{dt} - a''\frac{dc}{dt}\right)\zeta\right\},$$

$$\Upsilon = 2n\sin\gamma\left\{\left(b\frac{da'}{dt} - b'\frac{da}{dt}\right)\xi + \left(b\frac{db'}{dt} - b'\frac{db}{dt}\right)\eta + \left(b\frac{dc'}{dt} - b'\frac{dc}{dt}\right)\zeta\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{\left(b\frac{da''}{dt} - b''\frac{da}{dt}\right)\xi + \left(b\frac{db''}{dt} - b''\frac{db}{dt}\right)\eta + \left(b\frac{dc''}{dt} - b''\frac{dc}{dt}\right)\zeta\right\},$$

$$\Sigma = 2n\sin\gamma\left\{\left(c\frac{da'}{dt} - c'\frac{da}{dt}\right)\xi + \left(c\frac{db'}{dt} - c'\frac{db}{dt}\right)\eta + \left(c\frac{dc'}{dt} - c'\frac{dc}{dt}\right)\zeta\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{\left(c\frac{da''}{dt} - c''\frac{da}{dt}\right)\xi + \left(c\frac{db''}{dt} - c''\frac{db}{dt}\right)\eta + \left(c\frac{dc''}{dt} - c''\frac{dc}{dt}\right)\zeta\right\}.$$

Donc, en se rappelant que les axes des ξ, η, ζ sont des axes principaux,

$$S(\eta\Sigma - \zeta\Upsilon)\,dm = 2n\sin\gamma\left\{\left(c\frac{db'}{dt} - c'\frac{db}{dt}\right)S\,\eta^2dm - \left(b\frac{dc'}{dt} - b'\frac{dc}{dt}\right)S\,\zeta^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{\left(c\frac{db''}{dt} - c''\frac{db}{dt}\right)S\,\eta^2dm - \left(b\frac{dc''}{dt} - b''\frac{dc}{dt}\right)S\,\zeta^2dm\right\}.$$

Mais on a par les relations (c) et (b)

$$c\frac{db'}{dt} - c'\frac{db}{dt} = (c'a - ca')r = -b''r$$
$$b\frac{dc'}{dt} - b'\frac{dc}{dt} = (a'b - ab')q = -c''q$$
$$c\frac{db''}{dt} - c''\frac{db}{dt} = (c''a - ca'')r = \quad b'r$$
$$b\frac{dc''}{dt} - b''\frac{dc}{dt} = (a''b - b''a)q = \quad c'q,$$

donc

$$S(\eta\Sigma - \zeta\Upsilon)\,dm = -2n\sin\gamma\left\{b''r\,S\,\eta^2dm - c''q\,S\,\zeta^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{b'r\,S\,\eta^2dm - c'q\,S\,\zeta^2dm\right\}$$

et de même

$$S(\zeta\Xi - \xi\Sigma)\,dm = -2n\sin\gamma\left\{c''p\,S\,\zeta^2dm - a''r\,S\,\xi^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{c'p\,S\,\zeta^2dm - a'r\,S\,\xi^2dm\right\}$$

$$S(\xi\Upsilon - \eta\Xi)\,dm = -2n\sin\gamma\left\{a''q\,S\,\xi^2dm - b''p\,S\,\eta^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{a'q\,S\,\xi^2dm - b'p\,S\,\eta^2dm\right\}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (1) et observant que

$$S\xi^2 dm = \tfrac{1}{2}\left\{-A+B+C\right\},\ S\eta^2 dm = \tfrac{1}{2}\left\{A-B+C\right\},\ S\zeta^2 dm = \tfrac{1}{2}\left\{A+B-C\right\},$$

on aura les trois équations du mouvement.

Supposons d'abord que le mobile puisse tourner en tout sens autour du point fixe sans se trouver gêné en aucune manière. Alors on peut simplifier davantage les équations du mouvement en transformant les coordonnées y, z de manière que le plan des x, y devienne parallèle à l'équateur et z parallèle a l'axe terrestre et dirigé vers le nord. Or cela revient évidemment à supposer $\gamma = 90^0$; donc on aura ces équations

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= -2n(b'' r S\eta^2 dm - c'' q S\zeta^2 dm) \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= -2n(c'' p S\zeta^2 dm - a'' r S\xi^2 dm) \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)qp &= -2n(a'' q S\xi^2 dm - b'' p S\eta^2 dm). \end{aligned}\right\} \quad (3.)$$

Multipliant la première par $2p$, la seconde par $2q$ et la troisième par $2r$, ajoutant et intégrant on a

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \qquad (4.)$$

ce qui est l'équation des forces vives, laquelle ne dépend pas de la rotation de la terre.

Multipliant ensuite les équations (3) respectivement par a'', b'', c'', ajoutant et ayant égard aux relations (c) on trouve

$$Ad.\,a''p + Bd.\,b''q + Cd.\,c''r = 2n(a''da''\,S\xi^2 dm + b''db''\,S\eta^2 dm + c''dc''\,S\zeta^2 dm),$$

d'où l'on tire en intégrant

$$Aa''p + Bb''q + Cc''r = n(a''^2 S\xi^2 dm + b''^2 S\eta^2 dm + c''^2 S\zeta^2 dm) + l \ldots (5.)$$

équation pour la projection du moment principal sur le plan des xy ou sur l'équateur.

Nous nous bornons au cas où le mobile est un solide de révolution qui tourne autour de son axe de figure. On a alors $A = B$, ce qui réduit la dernière équation (3) à celle-ci

$$\frac{dr}{dt} = -n(a''q - b''p) = -n\frac{dc''}{dt},$$

donc $\qquad r = \varrho - nc''$,

ϱ étant une constante arbitraire.

Ensuite, les équations (4) et (5) donnent

$$A(p^2+q^2)+C(\varrho-nc'')^2=h$$

$$A(a''p+b''q)+Cc''(\varrho-nc'')=n\left\{\tfrac{1}{2}(a''^2+b''^2)C+c''^2(A-\tfrac{1}{2}C)\right\}+l.$$

Ces trois équations deviennent par les valeurs de a'', b'', c'' et en vertu des équations (2)

$$\frac{d\varphi}{dt}+\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}=\varrho-n\cos\theta,$$

$$A\left(\sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}+\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)=h-C\varrho^2+2nC\varrho\cos\theta-n^2C\cos^2\theta,$$

$$A\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}=-C\varrho\cos\theta+nA\cos^2\theta+\tfrac{1}{2}nC+l.$$

Si l'on suppose à l'origine du mouvement $\theta=\alpha$, $\dfrac{d\psi}{dt}=\dfrac{d\theta}{dt}=0$, $\dfrac{d\varphi}{dt}=\varrho-n\cos\alpha$, et qu'on néglige le terme multiplié par n^2, on trouve

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dt}+\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}=\varrho-n\cos\theta\\&A\left(\sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}+\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)=2nC\varrho(\cos\theta-\cos\alpha)\\&A\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}=-C\varrho(\cos\theta-\cos\alpha)+nA(\cos^2\theta-\cos^2\alpha).\end{aligned}\right\}\quad(6.)$$

Eliminant $\dfrac{d\psi}{dt}$ des deux dernières et négligeant toujours n^2 on a

$$A^2\sin^2\theta\,\frac{d\theta^2}{dt^2}=-C^2\varrho^2(\cos\theta-\cos\alpha)^2+2nAC\varrho(\cos\theta-\cos\alpha)\sin^2\alpha.$$

En vertu de cette équation la quantité $\cos\theta-\cos\alpha$ doit toujours être positive et très-petite. Supposant en conséquence $\theta=\alpha-u$ et négligeant u^3 &c. on aura

$$\sin^2\theta=\sin^2\alpha-u\sin 2\alpha+u^2\cos 2\alpha$$

$$\cos\theta-\cos\alpha=u\sin\alpha-\tfrac{1}{2}u^2\cos\alpha,$$

donc, en substituant dans la dernière équation et faisant pour abréger $C=kA$,

$$\frac{du^2}{dt^2}=\frac{2nk\varrho\sin^2\alpha(u\sin\alpha-\tfrac{1}{2}u^2\cos\alpha)-k^2\varrho^2u^2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-u\sin 2\alpha+u^2\cos 2\alpha};$$

développant et négligeant u^3 on trouve

$$\frac{du^2}{dt^2}=2nk\varrho\sin\alpha.\,u+(3nk\varrho\cos\alpha-k^2\varrho^2)\,u^2.$$

Si la vitesse ϱ est un peu considérable on peut négliger le terme $3nk\varrho\cos\alpha$, donc

$$\frac{du^2}{dt^2} = 2nk\,\varrho\sin\alpha.\,u - k^2\varrho^2.\,u^2,$$

ce qui donne, en intégrant de manière que $u = 0$ lorsque $t = 0$,

$$t = \frac{1}{k\,\varrho}\ \text{arc}\left(\cos = 1 - \frac{k\,\varrho}{n\sin\alpha}\,u\right)$$

donc $u = \dfrac{n\sin\alpha}{k\varrho}\,(1 - \cos k\varrho t)\ \ldots\ldots$ (7.)

Ensuite on a par la troisième équation (6)

$$A\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = -C\varrho(\cos\theta - \cos\alpha) - nA\,(\sin^2\theta - \sin^2\alpha),$$

donc en substituant pour θ et C leurs valeurs, et négligeant le carré de u et le produit nu,

$$(\sin^2\alpha - u\sin 2\alpha)\,\frac{d\psi}{dt} = -k\varrho\sin\alpha.\,u;$$

supposant que α ne soit pas nul, et substituant pour u sa valeur (7) on trouve

$$\left\{1 - \frac{2n\cos\alpha}{k\varrho}\,(1 - \cos k\varrho\,t)\right\}\frac{d\psi}{dt} = -n(1 - \cos k\varrho\,t),$$

ou en négligeant toujours n^2

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= -n(1 - \cos k\varrho t)\left\{1 + \frac{2n\cos\alpha}{k\varrho}\,(1 - \cos k\varrho t)\right\}\\ &= -n + n\cos k\varrho t,\end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\psi = -nt + \frac{n}{k\varrho}\sin k\varrho\,t.$$

Ainsi la ligne des nœuds, et par conséquent l'axe du mobile aura un mouvement rétrograde, c'est-à-dire en sens contraire au mouvement diurne de la terre, égal à nt, et ce mouvement sera accompagné d'une nutation de cet axe et d'une petite inégalité, lesquelles seront d'autant moins sensibles que la rotation du mobile est plus rapide. Donc si, a l'origine du mouvement, l'axe est pointé vers une étoile quelconque, il suivra à très-peu près le mouvement de cette étoile.

On peut remarquer que ce mouvement revient à celui d'un solide de révolution suspendu dans un point de son axe de figure, hors du centre de gravité, et qui a reçu une vitesse de rotation égale à ϱ autour de cet axe, après qu'il a été écarté de la direction verticale. En effet, si l'on fait

$$n = -\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{g}{\lambda}}, \quad k\varrho = 2\beta\sqrt{\frac{g}{\lambda}},$$

les valeurs de u et ψ deviennent identiques avec celles que *Poisson* a trouvées en traitant le mouvement dont nous venons de parler (voir son traité de mécanique 2e éd., vol. 2, pag. **171** & pag. **176-77**).

Examinons maintenant le mouvement d'un solide de révolution, tournant toujours autour de son axe de figure, mais de manière que, le centre de gravité demeurant fixe, l'axe soit assujetti à former avec la verticale un angle constant, ou, ce qui est la même chose, à se mouvoir sur la surface d'un cône droit.

Pour avoir égard à cette condition, il n'y a qu'à ajouter dans les seconds membres des équations (1) aux forces dues à la rotation de la terre une force motrice verticale V, appliquée à un point quelconque de l'axe du mobile, qui le retienne pendant le mouvement dans la même position angulaire par rapport à la verticale. Les composantes de V parallèles aux axes principaux seront $a''V$, $b''V$, $c''V$, et en prenant l'axe de figure du mobile pour l'axe des ζ, les coordonnées de son point d'application seront $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \zeta'$; ainsi on ajoutera seulement aux seconds membres des deux premières équations (1) respectivement $-b''\zeta' V$, $a''\zeta' V$.

Cela étant, on aura pour équations du mouvement, en observant que $B = A$, et faisant pour abréger $S\zeta^2 dm = \frac{1}{2} D$,

$$\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,qr &= -n\sin\gamma\,(Cb''r - Dc''q) \\
&\quad - n\cos\gamma\,(Cb'r - Dc'q) - b''\zeta' V \\
A\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp &= -n\sin\gamma\,(Dc''p - Ca''r) \\
&\quad - n\cos\gamma\,(Dc'p - Ca'r) + a''\zeta' V \\
C\frac{dr}{dt} \qquad\qquad &= -n\sin\gamma\,(Ca''q - Cb''p) \\
&\quad - n\cos\gamma\,(Ca'q - Cb'p),
\end{aligned}$$

auxquelles il faut joindre l'équation

$$\theta = \text{une constante}.$$

La troisième équation donne, en vertu des relations (c) et en observant que $\dfrac{dc''}{dt} = \dfrac{d.\cos\theta}{dt} = 0$,

$$\frac{dr}{dt} = -n\cos\gamma\,\frac{dc'}{dt},$$

donc $$r = -n\cos\gamma .\, c' + \varrho,$$

ϱ étant une constante arbitraire.

Multipliant la première équation par a'', la seconde par b'', et ajoutant, on aura en ayant égard aux relations (b) et (c) et observant que $dc'' = 0$,

$$A\left(a''\frac{dp}{dt} + b''\frac{dq}{dt}\right) = nC\cos\gamma .\, cr.$$

Or, θ étant constant, on a par les équations (2)

$$dp\,dt = \sin\varphi\sin\theta\, d^2\psi + \cos\varphi\sin\theta\, d\varphi\, d\psi$$
$$dq\,dt = \cos\varphi\sin\theta\, d^2\psi - \sin\varphi\sin\theta\, d\varphi\, d\psi,$$

d'ailleurs $a'' = \sin\theta\sin\varphi$, $b'' = \sin\theta\cos\varphi$, $c = \sin\theta\sin\psi$.

Substituant ces valeurs et faisant $r = \varrho$, parcequ'on néglige n^2, on trouve

$$A\sin\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = nC\varrho\cos\gamma\sin\psi.$$

Supposant que ϱ soit une quantité positive et que $\theta < 90^0$, ψ est la longitude du nœud ascendant du mobile. Ainsi donc:

1°, le mobile sera dans sa position d'équilibre stable lorsque $\psi = 180^0$, c'est-à-dire lorsque le nœud ascendant est dirigé vers l'ouest, ou bien lorsque l'angle que forme l'axe du mobile avec l'axe terrestre est réduit à son minimum et que la rotation a lieu dans le même sens que celle de la terre.

2°, le mobile fera autour de sa position d'équilibre stable des oscillations synchrones avec celles du pendule simple dont la longueur est

$$l = \frac{Ag\sin\theta}{nC\varrho\cos\gamma}.$$

Et en raisonnant comme dans le cas où la surface directrice de l'axe est plane, on aura, en désignant en général par ω l'angle que fait l'axe du cône avec l'axe du monde

$$l = \frac{Ag\sin\theta}{nC\varrho\sin\omega},$$

donc le temps d'une oscillation sera

$$t = \pi\sqrt{\frac{A\sin\theta}{nC\varrho\sin\omega}},$$

ce qui est la formule donnée par M. *Quet* dans la communication mentionnée plus haut. Faisant $\theta = 90^0$ on retombe sur les résultats déjà trouvés.

Au reste, cette influence mutuelle de deux rotations peut être étudiée sans le secours de formules mathématiques, comme l'ont fait MM. *Person* et *Foucault* dans leurs communications à l'Académie des sciences (séance du 27 Sept. 1852), et par l'une ou l'autre considération on voit que les deux rotations tendent au parallélisme, ou, autrement dit, que l'angle compris entre l'axe mobile et l'axe fixe, ou bien la différence des deux rotations projetées l'une sur l'autre tend à se réduire au minimum, ce qui est une sorte de moindre action. L'avantage des formules est de donner les mesures précises des mouvemens et du temps d'oscillation.

Considérons maintenant le cas où le point fixe n'est pas le centre de gravité. Supposons que ce centre appartienne à l'axe principal des ζ, de sorte qu'on ait pour ce point $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = -k$. On a alors pour équations du mouvement, — g étant la gravité,

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = -2n\sin\gamma\left\{b''r\,S\eta^2dm - c''q\,S\zeta^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{b'r\,S\eta^2dm - c'q\,S\zeta^2dm\right\} - gmkb''$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = -2n\sin\gamma\left\{c''p\,S\zeta^2dm - a''r\,S\xi^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{c'p\,S\zeta^2dm - a'r\,S\xi^2dm\right\} + gmka''$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)qp = -2n\sin\gamma\left\{a''q\,S\xi^2dm - b''p\,S\eta^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{a'q\,S\xi^2dm - b'p\,S\eta^2dm\right\}.$$

Multipliant ces équations par $2p$, $2q$, $2r$, ajoutant, substituant pour $a''q - b''p$ sa valeur $\frac{dc''}{dt}$, (c), et intégrant, on a l'équation des forces vives

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2gmkc'' + h \;\ldots\ldots\; (8.)$$

h étant une constante arbitraire.

Multipliant ensuite respectivement par a'', b'', c'' et ajoutant, on trouve en vertu des relations (c)

$$Ad.a''p + Bd.b''q + Cd.c''r = 2n\sin\gamma\left\{a''da''.\,S\xi^2dm + b''db''\,S\eta^2dm + c''dc''\,S\zeta^2dm\right\}$$
$$2n\cos\gamma\left\{a'da''\,S\xi^2dm + b'db''\,S\eta^2dm + c'dc''\,S\zeta^2dm\right\}.$$

Or on peut donner à cette équation, qui est celle de la projection du moment principal sur le plan des x, y, une forme plus commode. En effet, en faisant $\frac{1}{2}(A+B+C)=T$, on a $S\xi^2 dm = T-A$, $S\eta^2 dm = T-B$, $S\zeta^2 dm = T-C$; on a d'ailleurs $a'' da'' + b'' db'' + c'' dc'' = 0$,

$$a' da'' S\xi^2 dm + b' db'' S\eta^2 dm + c' dc'' S\zeta^2 dm = S y dz dm.$$

Substituant ces valeurs on trouve

$$A d.a''p + B d.b''q + C d.c''r = -2n\sin\gamma\,(Aa''da'' + Bb''db'' + Cc''dc'') + 2n\cos\gamma\; S y dz dm,$$

ce qui donne en intégrant,

$$A a''p + B b''q + C c''r = -n\sin\gamma\,(Aa''^2 + Bb''^2 + Cc''^2) + 2n\cos\gamma \int S y dz dm + l, \quad (9.)$$

l étant une constante arbitraire.

Enfin la troisième équation du mouvement se transforme dans celle-ci

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)qp = -n\sin\gamma\, C\frac{dc''}{dt} - n\cos\gamma\, C\frac{dc'}{dt} - n(B-A)\left[(a''q + b''p)\sin\gamma + (a'q + b'p)\cos\gamma\right].$$

Si l'on suppose que le corps soit un pendule qui ne fasse que de très-petites excursions autour de la verticale, on pourra négliger dans l'équation (9) le terme $2n\cos\gamma\int S y dz dm$, et si en même temps on lui donne une forme telle, qu'on puisse négliger la différence des deux momens d'inertie A et B, la dernière équation devient intégrable et donne

$$r = -n\sin\gamma.c'' - n\cos\gamma.c' + \varrho \;\ldots\; (10.)$$

ϱ étant une constante arbitraire. Et en faisant $B=A$, les équations (8) (9) donnent ces deux-ci

$$A(p^2+q^2) + Cr^2 = 2gmkc'' + h \;\ldots.\; (11.)$$

$$A(a''p + b''q) = -n\sin\gamma A(a''^2 + b''^2) + n\cos\gamma Cc'c'' - \varrho Cc'' + l \ldots (12.)$$

Substituant dans ces équations les valeurs de $p, \ldots a'' ..$ &c. et supposant qu'on ait à l'origine du mouvement $\theta = \alpha$, $\psi = 0$, $p^2+q^2+r^2=0$, ou, ce qui revient au même, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = 0$,

on trouve en négligeant les termes multipliés par n^2,

$$\frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\frac{d\psi}{dt} = -n\sin\gamma(\cos\theta - \cos\alpha) + n\cos\gamma(\sin\theta\cos\psi - \sin\alpha) \ldots (13.)$$

$$A\left(\sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2}\right) = 2gmk(\cos\theta - \cos\alpha) \;\ldots.\; (14.)$$

$$A \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = -n \sin\gamma A(\sin^2\theta - \sin^2\alpha) - n\cos\gamma C(\sin\theta\cos\theta\cos\psi - \sin\alpha\cos\alpha)$$
$$- \varrho C(\cos\theta - \cos\alpha),$$

où l'on mettra pour ϱ sa valeur $n \sin\gamma \cos\alpha - n \cos\gamma \sin\alpha = n \sin(\gamma - \alpha)$, donc

$$A \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = n \sin\gamma \left\{ A(\sin^2\alpha - \sin^2\theta) - C\cos\alpha(\cos\theta - \cos\alpha) \right\}$$
$$- n\cos\gamma\cos\theta C(\sin\theta\cos\psi - \sin\alpha) \ldots \quad (15.)$$

Négligeant enfin les puissances de θ et α supérieures au carré et désignant les rapports $mk : A$ par $\frac{1}{\lambda}$ et $C : A$ par c, on aura ces deux équations:

$$\theta^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{g}{\lambda}(\alpha^2 - \theta^2)$$

$$\theta^2 \frac{d\psi}{dt} = n \sin\gamma (1 - \tfrac{1}{2}c)(\alpha^2 - \theta^2) + n\cos\gamma\, c\,(\alpha - \theta\cos\psi).$$

Maintenant considérons d'abord le mouvement du pendule tel qu'il aurait lieu au pôle. Supposons en conséquence $\gamma = 90^\circ$, et faisons $n(1 - \frac{1}{2}c) = \beta \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$; alors en éliminant $\frac{d\psi}{dt}$, on aura

$$\theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{g}{\lambda} \left\{ (1 + \beta^2)\theta^2 - \alpha^2\beta^2 \right\} \left\{ \alpha^2 - \theta^2 \right\}$$

$$\theta^2 \frac{d\psi}{dt} = \beta \sqrt{\frac{g}{\lambda}} (\alpha^2 - \theta^2).$$

Or ce sont précisément les mêmes équations qu'a trouvées *Poisson* en traitant le problème du mouvement d'un solide de révolution, qu'on fait osciller autour d'un point de son axe de figure après lui avoir imprimé une vitesse de rotation égale à

$$\frac{2A}{C}\beta\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = n\left(\frac{2}{c} - 1\right),$$

— voyez son traité de mécanique 2e éd. vol. 2. pag. 172. — On a ainsi le temps d'une oscillation entre deux maxima de θ

$$2T = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g(1 + \beta^2)}};$$

et le mouvement pendant ce temps du nœud ascendant,

$$\psi = \pi - \frac{\pi\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \pi - 2T\beta\sqrt{\frac{g}{\lambda}} = \pi - 2Tn(1 - \tfrac{1}{2}c).$$

Ce mouvement aura lieu dans le sens de la rotation de la terre et sera en même temps rétrograde par rapport à la vitesse $n\left(\frac{2}{c}-1\right)$; donc, imprimer au mobile cette vitesse en sens contraire à la rotation de la terre, et l'abandonner ensuite à l'action de la gravité, est la même chose que de la soumettre sans vitesse initiale à l'action de la gravité et de la rotation terrestre au pôle. Et la vitesse imprimée doit être d'autant plus grande que le moment d'inertie C est petit par rapport à A.

Le mouvement ψ se compose de deux parties; la première π est le mouvement périodique du pendule, lequel aura lieu dans le sens de la rotation terrestre, la seconde $-2\,T n\,(1-\frac{1}{2}\,c)$ est le mouvement en sens contraire dû à la rotation de la terre. Si le pendule se transforme dans un pendule simple, on aura $c=0$, et le second mouvement devient ainsi $-2\,T n$, ce qui est d'accord avec ce qu'on a trouvé plus haut.

Si maintenant on suppose le pendule placé à une latitude quelconque, les deux équations ci-dessus ne sont point intégrables sous forme finie. Mais en prenant dans une première approximation

$$\theta^2\,\frac{d\psi}{dt} = \text{une quantité constante}$$

et en désignant par a et b la plus grande et la plus petite valeur de θ, on pourra donner aux équations du mouvement cette forme

$$\theta^2\,\frac{d\psi^2}{d\,t^2} + \frac{d\theta^2}{d\,t^2} = \frac{g}{\lambda}\left\{a^2+b^2-\theta^2\right\}$$

$$\theta^2\,\frac{d\,\psi}{d\,t} = a\,b\sqrt{\frac{g}{\lambda}},$$

d'où l'on tire

$$\theta^2\,\frac{d\,\theta^2}{d\,t^2} = \frac{g}{\lambda}\,(a^2-\theta^2)\,(\theta^2-b^2),$$

ce qui donne, en intégrant de manière que $\theta=a$, $\psi=0$ pour $t=0$, et faisant $\sqrt{\frac{g}{\lambda}}=\mu$,

$$\theta^2 = a^2\cos^2\mu t + b^2\sin^2\mu t$$

et
$$\psi = \text{arc}\ \left(\text{tang} = \frac{b}{a}\ \text{tang}\,\mu t\right),$$

donc
$$\cos\psi = \frac{a\cos\mu\,t}{\sqrt{a^2\cos^2\mu\,t + b^2\sin^2\mu\,t}}.$$

Ecrivant la seconde équation ci-dessus comme il suit

$$\frac{d\psi}{dt} = -n\sin\gamma(1-\tfrac{1}{2}c) + n[\alpha c.\cos\gamma + \alpha^2(1-\tfrac{1}{2}c)\sin\gamma]\frac{1}{\theta^2} - \frac{nc.\cos\gamma\cos\psi}{\theta},$$

substituant pour θ et $\cos\psi$ les valeurs qu'on vient de trouver, intégrant et supposant $\psi = 0$ lorsque $t = 0$, on a

$$\psi = -n\sin\gamma(1-\tfrac{1}{2}c)\,t + n\,[\alpha c.\cos\gamma + \alpha^2(1-\tfrac{1}{2}c)\sin\gamma)]\,\text{arc}\,(\text{tang} = \frac{b}{c}\,\text{tang}\,\mu t)$$

$$- \frac{nc.\cos\gamma}{2\mu\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}\sin\mu t}{a-\sqrt{a^2-b^2}\sin\mu t}.$$

Or, sans aller plus loin, on peut conclure, que sous une latitude quelconque, le mouvement sera, à quelques inégalités périodiques près, comme au pôle, avec la différence que n sera remplacé par $n\sin\gamma$.

Pour achever de déterminer la position du mobile à un instant quelconque, il ne reste qu'à trouver la valeur de φ; or, en négligeant les carrés et les produits de θ, α, n, l'équation (13) donne

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

ce qui fait voir, que les axes principaux conserveront à-peu-près leur position pendant le mouvement de la ligne des nœuds. Donc ce n'est que le mouvement de cette droite, et par conséquent de l'axe de figure du mobile, lequel lui est constamment perpendiculaire, qui se trouve modifié par la rotation de la terre, et cela à-peu-près comme pour le pendule simple.

Supposons enfin que le pendule ne puisse osciller en tout sens autour de son point de suspension, mais que l'axe principal des ξ soit assujetti a demeurer horizontal. Alors, en raisonnant comme plus haut (pag. 42), on aura pour équations du mouvement

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = -2n\sin\gamma\left\{b''r\,S\eta^2dm - c''q\,S\zeta^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{b'r\,S\eta^2dm - c'\,q\,S\zeta^2dm\right\} - gmkb''$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = -2n\sin\gamma\left\{c''p\,S\zeta^2dm - a''r\,S\xi^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{c'p\,S\zeta^2dm - a'\,r\,S\xi^2dm\right\} + gmka'' - \xi'c''V$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)qp = -2n\sin\gamma\left\{a''q\,S\xi^2dm - b''p\,S\eta^2dm\right\}$$
$$-2n\cos\gamma\left\{a'\,q\,S\xi^2dm - b'p\,S\eta^2dm\right\} + \xi'b''V,$$

auxquelles il faudra joindre l'équation

$$a'' = 0,$$

qui revient à

$$\varphi = 0.$$

En vertu de cette dernière on a

$$a' = \sin\psi,\quad b' = \cos\theta\cos\psi,\quad c' = -\sin\theta\cos\psi,$$
$$b'' = \sin\theta,\qquad c'' = \cos\theta;$$

$$p = \frac{d\theta}{dt},\quad q = \sin\theta\frac{d\psi}{dt},\quad r = \cos\theta\frac{d\psi}{dt}.$$

On a d'ailleurs

$$S\xi^2 dm = \tfrac{1}{2}(-A+B+C),\quad S\eta^2 dm = \tfrac{1}{2}(A-B+C),\quad S\zeta^2 dm = \tfrac{1}{2}(A+B-C).$$

Substituant ces valeurs et éliminant V des deux dernières, on trouve

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} + (C-B)\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} = -gmk\sin\theta$$
$$-n\left\{[A-(B-C)\cos 2\theta]\cos\gamma\cos\psi - (B-C)\sin\gamma\sin 2\theta\right\}\frac{d\psi}{dt},$$

$$(B\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2(B-C)\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= n\left\{[A-(B-C)\cos 2\theta]\cos\gamma\cos\psi - (B-C)\sin\gamma\sin 2\theta\right\}\frac{d\theta}{dt},$$

lesquelles coïncident avec les équations déjà traitées dans ce mémoire (pag. 27) lorsqu'on y néglige les termes multipliés par n^2 et dus à l'effet de la force centrifuge.

Ces équations ne donnent pas de mouvement azimuthal continu comme nous l'avons vu; ainsi cette analyse paraît conduire à des résultats conformes à ceux qu'a trouvés **M. *Dieu*** dans un mémoire dont l'extrait se trouve dans les comptes rendus de l'Académie des sciences, séance du 29 Nov. 1852, pag. 792.

Du reste, en comparant ce dernier mouvement avec le cas particulier, considéré plus haut, où le corps tourne autour d'un axe passant par le centre de gravité, on aurait pu prévoir ce dernier résultat sans aucun calcul.

Je n'ajouterai que peu de mots sur quelques essais que j'ai faits pour vérifier par des expériences les résultats de calcul exposés dans ce mémoire, et spécialement pour observer les phénomènes dont il a été question dans le dernier paragraphe et dans l'addition.

Pour observer le mouvement d'un solide de révolution qui tourne sur son centre de gravité, je me suis servi d'une roue massive d'environ 12 centimètres de diamètre, suspendue dans un anneau extérieur fixe et deux intérieurs mobiles, de sorte qu'elle peut tourner sur trois axes comme la machine de *Bohnenberger*. Quand on donne à cette roue une très-grande vitesse de rotation, la stabilité du plan de la roue se prononce tout de suite lorsqu'on tourne l'instrument d'un manière quelconque. Mais s'il s'agit d'un mouvement aussi lent que celui de la terre, il paraît très-difficile de réaliser le résultat de la théorie, qui dit alors que l'axe doit se mouvoir comme une lunette parallactique. Car d'abord l'instrument doit être parfaitement équilibré, et ensuite le frottement ou la torsion — si l'on se sert du mode de suspension de M. *Foucault* (c. r. 27 Sept. 1852 pag. 421 & suiv.) — produira nécessairement des forces dont l'effet devient sensible lorsqu'on ne soumet l'instrument qu'à un mouvement d'une extrême lenteur, savoir celui de la rotation diurne de la terre, vu que l'axe doit alors ne prendre qu'un mouvement de la même lenteur. Mais si l'on met l'axe général de l'instrument dans une direction parallèle à l'axe terrestre, la suite d'impulsions, données à l'appareil par la rotation de la terre au moyen du frottement, n'aura lieu qu'autour de cet axe et elles se composent avec la rotation imprimée au mobile pour faire décrire à son axe de figure le méridien où il était placé d'abord, sans donner aucun mouvement à l'anneau moyen, lequel prendra par conséquent un mouvement apparent en ascension droite égal et contraire a celui de la terre. Cette manière d'expérimenter est donnée par M. *Person* (comptes rendus 1852, 2e semestre, pag. 417 et pag. 549).

Il en est tout autrement quand on n'opère qu'avec deux axes en mettant l'anneau moyen dans une position fixe par rapport à la terre, comme dans le plan du méridien par exemple. Car cet anneau, mobile dans le cas précédent, se trouve maintenant forcé à suivre le mouvement du méridien, et l'axe du mobile, décrivant un plan perpendiculaire à celui de l'anneau moyen, ce plan, ainsi que le diamètre de cet anneau qui lui est perpendiculaire, sera astreint à se mouvoir avec la terre. On aura alors un mouvement beaucoup plus rapide, comme il est facile de s'en convaincre par le calcul. En effet, si l'on suppose que le plan directeur de l'axe soit horizontal, on a pour le temps d'oscillation dans ce plan la formule ci-dessus pag. 35

$$t = \pi \sqrt{\frac{B}{n\,\omega\,A\cos\gamma}}$$

où $n = \dfrac{2\,\pi}{86164}$. Soit $B = A$, $\cos\gamma = 55^0, 41'$, latitude de Copenhague, et supposons que la roue ne fasse que 10 rotations par seconde. On a alors $\omega = 20\,\pi$, ce qui donne

$$t = 61'', 8.$$

Donc même avec une vitesse de rotation très modérée on aura un temps d'oscillation facile à observer, et si l'on peut donner au mobile une vitesse 9 fois plus grande par exemple, on réduira ce temps à 20″ environ, qui sera cependant plus ou moins augmenté par le frottement, selon la perfection de l'appareil. Ainsi dans cette expérience on n'a pas besoin de se borner à un mouvement qu'on imprime à l'appareil en le fixant sur la circonférence d'un cercle figurant un méridien, ainsi que l'a fait M. *Sire* (c. r. 27 Sept. 1852, pag. 431-32), mais si l'on met le soin convenable pour empêcher tout mouvement de l'axe vertical perpendiculaire au plan directeur de l'axe, précaution indispensable pour ne pas introduire d'autre rotation que celle de la terre, on voit en effet l'axe du mobile se tourner vers le nord de manière que la rotation du mobile a lieu dans le même sens que celle de la terre, et exécuter ensuite des oscillations autour de cette position d'équilibre stable dont la durée répond aussi près qu'on doit l'attendre, à la valeur donnée par la formule. Avec un instrument bien construit, qui tourne avec assez de facilité sur ses pivots, il n'y a nul doute que l'expérience réussira toujours lorsque l'immobilité de l'axe vertical est bien assurée. Mais le plus léger défaut de cette condition dérangera infailliblement l'expérience, ainsi que je l'ai observé souvent avec l'instrument que j'ai employé. On a ainsi pour la démonstration expérimentale de la rotation de la terre une expérience tout aussi concluante que celle du pendule et facile à exécuter. Toutefois on ne doit pas attendre que l'axe du mobile se mette toujours en repos précisément dans le méridien, car la vitesse de rotation décroissant sans cesse, la force avec laquelle l'axe tend vers sa position d'équilibre peut être vaincue par le frottement avant qu'il ait atteint cette position. Lorsque le plan directeur est le méridien, l'expérience ne sera sans doute pas plus difficile, mais mon instrument ne se prêtant pas bien à cette expérience, je n'ai pu l'essayer.

Si, en plaçant l'axe du mobile à une distance angulaire de l'axe directeur plus petite que 90°, on fait en sorte qu'il devra décrire un cône droit, la formule qui donne le temps d'oscillation, savoir

$$t = \pi \sqrt{\frac{A \sin \theta}{n\, C\, \varrho \sin \omega}} \quad \text{(voir pag. 43)},$$

fait voir que ce temps sera encore plus court; mais alors la composante autour de l'axe directeur de la rotation qu'introduit le frottement de l'axe du mobile, composante qui était nulle dans le cas précédent, devient très-sensible et rend l'expérience impraticable. Il suit de là que l'instrument doit être construit de manière que l'axe du mobile tourne aussi exactement que possible dans un plan perpendiculaire à l'axe directeur.

La théorie nous indique un autre mouvement oscillatoire d'un corps qui tourne sur un axe vertical passant par le centre de gravité, mouvement dû à l'effet de la force centrifuge et très-petit de l'ordre du mouvement de la terre. En effet, en vertu de l'équation qu'on trouve pag. 22, savoir

$$\frac{d\psi}{dt} = an \cos\gamma \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\psi},$$

une aiguille tournant sur un axe vertical ne peut être en équilibre que dans une position perpendiculaire au méridien, et étant écartée de cette position, elle tendra à y revenir en faisant des oscillations d'une durée d'à-peu-près 12 heures sous l'équateur. Ce phénomène est naturellement inappréciable par l'observation, mais en faisant tourner un axe, qui porte une telle aiguille, autour d'une droite qui lui est perpendiculaire, l'aiguille tend tout de suite à prendre sa position d'equilibre et on aperçoit le mouvement oscillatoire qui s'accomplit dans le temps que donne le calcul.

Pour les oscillations d'un corps grave l'expérience devient plus difficile. Nous avons vu que, si l'on fait osciller un corps dont les momens d'inertie autour des axes principaux passant par le point de suspension permettent de le remplacer par un solide de révolution dont l'axe de figure passe par le centre de gravité, le mouvement de cet axe sera semblable à celui d'un pendule simple en ayant égard à la rotation de la terre, et les deux axes principaux, qui sont horizontaux dans l'état d'équilibre demeureront à-peu-près immobiles, de sorte que l'extrémité de l'axe de figure doit décrire approximativement une ellipse dont les axes auront un mouvement en sens contraire à celui de la terre, mais que le corps ne tournera pas en même temps sensiblement sur cet axe. Nous avons supposé qu'à l'origine du mouvement on n'ait pas imprimé au mobile de vitesse horizontale, d'où il suit que le mouvement périodique sera direct comme pour le pendule simple, mais il est aisé de voir, qu'une petite vitesse initiale horizontale ne modifiera que le mouvement périodique et n'aura aucune influence sur le mouvement du grand axe de l'ellipse, dû à la rotation de la terre.

Cela posé il est clair, qu'un pendule qui consiste comme à l'ordinaire d'un boulet, suspendu par un fil métallique, est déjà avec quelque approximation un corps de ce genre, de sorte que le phénomène dont il s'agit se trouve déjà en partie vérifié par l'expérience. Mais pour vérifier que le pendule ne tourne pas sur son axe de figure, il ne suffirait pas de marquer par exemple un point sur la surface du boulet pour en observer le mouvement, vu que la résistance qu'oppose le fil contre sa torsion pourrait le détruire; et il serait nécessaire pour cela de faire en sorte que le corps oscillerait effectivement autour d'un point sans se trouver gêné ni par torsion ni par frottement, ce qui ne paraît pas possible.

Mais en renonçant à cette dernière vérification, j'ai songé qu'on pourrait même profiter du frottement pour observer la déviation horizontale sur une assez grande échelle avec un pendule de longueur ordinaire. L'appareil dont je me suis servi pour cela consiste dans une barre métallique suspendue en sorte qu'elle peut se mouvoir sur trois axes, le premier vertical, le second horizontal et le troisième perpendiculaire à ce dernier, lesquels sont des axes principaux dans l'état d'équilibre. Autour du premier axe le pendule a la plus grande mobilité possible, tandis qu'il tourne un peu plus facilement autour du second axe, qu'autour du troisième. Maintenant, si l'on fait osciller le pendule autour des deux derniers axes seulement, les oscillations tendent à la forme d'une ellipse allongée dont le grand axe est perpendiculaire à l'axe horizontal, et on n'observe point de déviation. Mais lorsqu'on donne au pendule la liberté de tourner en même temps autour de la verticale, il entraînera l'axe horizontal, auquel le grand axe de l'ellipse demeure perpendiculaire, et fait ainsi paraître la déviation azimuthale. Pour observer celle-ci on a lié invariablement à l'axe vertical une glace, par laquelle on peut regarder dans une lunette à mire le mouvement apparent d'un petit arc de cercle divisé en degrés et parties de degrés et placé à une distance de la glace égale au rayon, mouvement qui sera double de celui de l'axe horizontal ou du grand axe de l'ellipse. Les expériences que j'ai faites jusqu'ici, n'ont donné, il est vrai, qu'un peu plus d'un dixième de la valeur indiquée par la formule

$$\psi = -n \sin\gamma.\ t,$$

valeur peu différente de $-n \sin\gamma\,(1 - \frac{1}{2}c)\,t$ qu'on a trouvée plus haut, mais cela peut bien être attribué à ce que l'immobilité de l'axe vertical n'a pas été bien assurée, ce qui paraît être une condition indispensable pour que l'expérience puisse réussir.

Si l'on rend le pendule immobile autour du troisième axe, la déviation s'évanouit, ce qui est d'accord avec la théorie.

J'ajouterai seulement en terminant, que dans les comptes rendus, séance du 13 déc. 1852 p. 855, on lit la description d'un appareil imaginé par M. *Porro* pour observer de même les déviations avec un pendule de longueur ordinaire, mais on n'y voit point de résultats d'observation.

Correction.

Pag. 35, L. 18, longueur, *lisez* longitude.